L'estimation numérique dans les apprentissages mathématiques : rôles et interêts de la mise en correspondance des représentations numériques au niveau développemental, éducatif et rééducatif

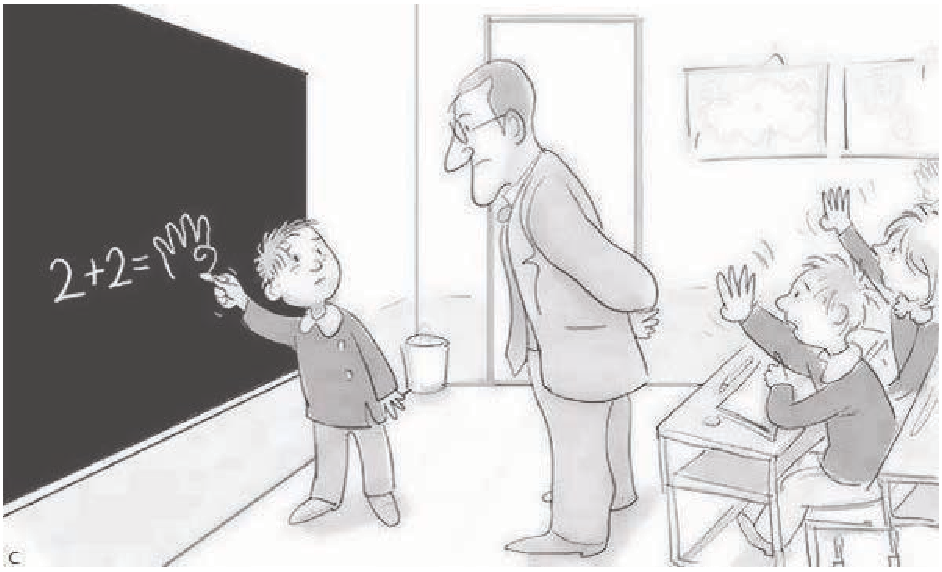
Samantha Meyer

Université Charles-De-Gaulle Lille Nord de France
Ecole Doctorale Sciences de l'Homme et de la Société

Thèse en vue de l'obtention du grade de Docteur en Psychologie

L'estimation numérique dans les apprentissages mathématiques

Rôles et intérêts de la mise en correspondance des représentations numériques au niveau développemental, éducatif et rééducatif.



Présentée et soutenue publiquement par

Samantha MEYER

le 29 mai 2015

Sous la direction du Pr. Bruno Vilette

Jury

M. Emmanuel Sander	Professeur Paris 8	Rapporteur
M. Gérard Sensevy	Professeur ESPé Bretagne	Rapporteur
M. Alain Guerrien	Professeur Lille 3	Examinateur

Remerciements

Je suis arrivée à Lille en 2009 Je ne savais pas très bien où je mettais les pieds et je ressentais à la fois la peur et l'enthousiasme de l'inconnu. Je savais seulement que mon souhait était d'évoluer dans la recherche. A mon arrivée, j'ai eu la chance de rencontrer M. Bruno Vilette pour un projet de mémoire de Master 1. Après deux années de Master à travailler chez les « plus vieux », l'aventure de la thèse commence, chez les « plus jeunes ». Trois casquettes me permettront de varier mon profil pendant quatre ans : celle de psychologue, d' « apprenti-chercheur » et celle d'ingénieur sur le terrain.

Tout ce parcours, je le dois avant tout à toi, Bruno. Tu m'as très rapidement accordé toute ta confiance et durant 6 ans tu m'as écouté, accompagné, guidé et questionné. Merci, sincèrement et du fond du coeur pour tout.

Je remercie sincèrement les membres du jury, Emmanuel Sander, Gérard Sensevy et Alain Guerrien, que j'ai côtoyé au long de mon cursus ou de ma thèse et qui sont des professeurs passionnés et passionnants. Un grand merci pour leur présence et le temps passé à lire à ce travail et à le questionner.

Merci également à l'ensemble du laboratoire PSITEC qui m'a accueilli et qui a proposé de nombreuses formations doctorales et de recherche de qualité. Aux enseignants et autres membres et bien sûr aux doctorants, partenaires de cet aventure.

Je souhaite également à remercier la grande famille du Centre d'Investigation Clinique. Pour toutes ces journées où je pouvais reprendre mon souffle et travailler sur d'autres choses, pour tous les conseils, pour tous les fous-rires. Pour m'avoir permis de passer le cap de « bébé psychologue ». Un merci tout particulier à Stef, qui a également grandement participé à mon parcours jusqu'aujourd'hui, et qui a été un maître jedi d'exception... Merci de ta confiance.

Et merci aussi à Mam Isa, Maria, Anne-Laure, Elise, Isabelle, Elsa, Catherine, Alexandre, Steph ... et tous les autres.

Merci à mes précieux amis, Marie D., Nancy et Nicolas. Proche ou à distance, j'ai pu compter sur vous pour des discussions enflammées ou quand il fallait décompresser. Merci aussi à Lucie B., Lucie V., Olivier, Sophie, Arnaud, Marine, Faustine, Dany et Monika qui ont pimenté ce parcours par des échanges et du soutien, sur fond de soirées gastronomiques...

Un merci très spécial à Marie (Odile) H., une directrice et enseignante hors pair, une alliée de choix et surtout une amie sincère et fidèle. Une rencontre que je n'oublierais jamais.

Merci à ma famille, d'avoir accepté et compris ma volonté de partir dans le Nord. D'avoir tenté, alors que ce n'était pas toujours simple, de comprendre ce sur quoi je travaillais et ce que ça impliquait. De m'avoir soutenu, toujours, de près et de loin.

Merci aux enfants, aux enseignants, aux directeurs, aux inspecteurs qui m'ont laissé venir à leur rencontre, assister aux séances de classe et qui ont échangé avec moi toujours de manière passionnée et bienveillante. Merci bien sûr, à tous ceux qui se sont lancés dans l'aventure ACE, les chercheurs et autres « apprentis-chercheurs », et tous ceux qui ont partagé ces trois années intenses avec nous. Je pense plus particulièrement à Mme Deru, Mme Leclercq, Mme Evin, Mme Silver, Mme Chailland, Mme Gaillegue ou encore Mme Baglieto, qui m'ont beaucoup apporté.

Et enfin, merci à ma famille à moi, à Choup, grâce à qui j'arrive au bout de ce travail, qui a partagé les hauts en supportant les bas. Qui a cru en moi et qui m'a donné l'aide et les encouragements dont j'avais besoin. Et à Martie et Onyx qui ont été les meilleurs anxiolytiques qui soient !

Table des matières

« Le but des mathématiques est de déterminer les grandeurs les unes par les autres, d'après les relations précises qui existent entre-elles »

Auguste Comte

Présentation de la thèse

Dénombrer et calculer sont des activités que nous réalisons tous les jours, de manière plus ou moins automatisées et avec plus ou moins de succès. Ces habiletés se construisent dès le plus jeune âge. Nous n'en avons pas toujours conscience, mais de nombreuses aptitudes numériques sont essentielles au quotidien, par exemple pour faire les courses, gérer son budget, organiser son temps, … mais aussi dans la vie professionnelle. On sait ainsi que les habiletés arithmétiques jouent un rôle dans l'employabilité, sur le niveau des salaires, et même sur la productivité au travail (Rivera-Batiz, 1982). C'est aussi une voie importante pour l'apprentissage formel et le développement du raisonnement. Il y a donc un « bagage numérique minimal » à acquérir (Noël, 2005). C'est pourquoi l'étude du développement des habiletés arithmétiques et la prise en compte des obstacles rencontrés par l'enfant dans les apprentissages mathématiques sont si importantes.

Ce champ d'investigation est d'autant plus pertinent au regard des dernières évaluations nationales du CEDRE (Cycle des Evaluations Disciplinaires Réalisées sur Echantillon) dont les conclusions s'avèrent inquiétantes. En effet, elles ont révélé que 15 % des élèves ne maîtrisent pas les compétences mathématiques attendues au terme du 1er degré d'enseignement. De plus, entre 2003 et 2009, le score moyen des élèves en mathématiques en classe de 3ème a significativement diminué, avec une augmentation de la proportion d'élèves les plus faibles et une diminution des plus performants. Les résultats des études PISA (Program for International Student Assessment) vont dans le même sens en classant la France au 25ème rang (sur 65 pays) quant aux performances des élèves en mathématiques, avec un niveau moyen égal à la moyenne des pays de l'OCDE (Rapport PISA France, 2012). Depuis la première évaluation réalisée en 2003, le score des élèves de 15 ans a diminué de 16 points (495 points en 2012 contre 511 points en 2003). Le premier pays du classement est Shanghai avec 613 points.

Ces constats soulèvent un certain nombre de questions. Pour y répondre, nous manquons encore de connaissances solides et scientifiquement éprouvées sur la manière dont se construisent la compréhension des nombres et les acquisitions numériques chez l'enfant. Nos connaissances dans ce domaine progressent néanmoins grâce au nombre croissant de recherches réalisées depuis les trois dernières décennies.

Ce sont notamment les recherches sur le bébé qui ont été les plus fertiles ces trente dernières années. D'une manière générale, ces recherches ont mis en exergue une sensibilité précoce à la quantité et aux transformations numériques. En effet, des bébés de quelques jours sont capables de discriminer deux quantités distinctes dans un certain rapport (Antell et Keating, 1983). Ces résultats sont confirmés par des études en neuroimagerie (Izard, Dehaene-Lambertz et Dehaene, 2008). Cette discrimination de la magnitude se retrouve également chez certaines espèces animales : elle serait le fruit d'intuitions primitives qui, d'un point de vue phylogénétique, ont perduré au cours de l'évolution (Cantlon et Brannon, 2007 ; Feigenson, Dehaene et Spelke, 2004).

Pour certains auteurs, cette capacité de discrimination est permise grâce à l'existence très précoce d'un « sens du nombre » (Dehaene, 1997 ; 2001) qui renvoie à la capacité à se représenter et à manipuler une grandeur numérique non symbolique. Le « sens du nombre » ne nécessite pas d'enseignement des mathématiques étant donné qu'il se retrouve dans des populations qui n'accèdent pas à une éducation formelle en arithmétique (Pica, Lemer, Izard, & Dehaene, 2004). Le « sens du nombre », dont le support neuro-anatomique a été localisé, serait sollicité pour effectuer des calculs approximatifs et des comparaisons de quantité par le *subitizing* ou par l'estimation numérique. Toutefois, cette compétence de quantification initiale, basée sur une représentation analogique des quantités, ne permet pas à elle seule de maîtriser les représentations et les traitements numériques symboliques. Mais c'est vraisemblablement sur cette base sémantique que les apprentissages symboliques ultérieurs vont se construire, grâce à la mise en correspondance des nombres symboliques avec les grandeurs analogiques correspondantes.

Au cours des vingt dernières années, ce sont plus spécifiquement les travaux en neuro-imagerie, et d'une manière générale en neurosciences, qui ont largement contribué aux avancées dans ce domaine. Ainsi, pour rendre compte du traitement des nombres et des quantités chez l'adulte, Dehaene et ses collaborateurs ont développé le modèle du triple code (Dehaene, 1992 ; Dehaene & Cohen, 1995 ; 1997) dans lequel ils distinguent trois codes de traitement dont deux seraient symboliques (représentations orales et écrites des nombres) et le troisième non-symbolique (représentation analogique des quantités). Pour Dehaene, la sémantique des nombres se trouve dans le code non symbolique et serait indépendante du langage. Les enfants établiraient des connexions entre ces codes pour donner du sens aux symboles numériques et aux opérations arithmétiques.

Bien que le modèle du triple code sous-tende certaines hypothèses développementales, il ne permet pas de rendre compte de l'évolution de la construction des nombres et du calcul d'un point de vue ontogénétique. Rien n'indique par exemple comment les enfants apprennent à établir des liens entre les codes (analogique, oral, écrit). Pour palier notamment à cette limite, Von Aster &

Shalev (2007) ont élaboré un modèle développemental en quatre étapes organisées de manière hiérarchique. Ce modèle permet une compréhension plus fine des troubles du nombre et du calcul. Selon les auteurs, le sens premier des nombres reposerait sur un système de représentations non symbolique (ou analogique) des quantités, qui permettrait de se représenter très tôt la valeur cardinale des collections. C'est sur cette base que viendraient ensuite se greffer les nombres symboliques - d'abord à l'oral, puis à l'écrit - après avoir été mis en correspondance avec la grandeur numérique correspondante (ou magnitude).

Cette mise en correspondance permettrait alors de construire une représentation graduée et ordinale des nombres. Cette représentation, désignée par la métaphore d'une « ligne numérique mentale », serait à concevoir comme le résultat de plusieurs intégrations, d'abord avec les grandeurs, puis avec le comptage verbal, et enfin avec l'apprentissage du calcul à l'écrit. Progressivement, cette représentation serait enrichie au fil des expériences et des apprentissages scolaires. Si chaque étape est un prérequis pour accéder à l'étape suivante, rien n'indique cependant comment les différents codes entrent en interaction au cours du développement ; et comment ils s'influencent, ou s'opposent, au fil des apprentissages.

Ainsi, en regard des modèles de Dehaene et de Von Aster, de nombreuses questions demeurent : les différentes représentations se développent-elles de manière indépendante ? Comment les différents codes s'imbriquent-ils ? Comment se passe l'accès à l'écrit ? Que devient l'oral ? Une compréhension fine de ces éléments nous semble indispensable pour guider les pratiques pédagogiques et rééducatives.

Un constat important est issu des modèles de Dehaene et de Von Aster ainsi que des études expérimentales : les représentations numériques langagières et les activités non symboliques sont en étroite relation, et donc en interaction évolutive, ce qui nécessite de reconsidérer le développement du nombre et du calcul chez l'enfant (Fayol, 2002). Nous savons par ailleurs qu'il existe une forte comorbidité entre les troubles mathématiques et les troubles langagiers (Landerl, Bevan & Butterworth, 2004). Selon les études et les critères utilisés, l'association des deux troubles varie entre 17 à 64% (Gross-Tsur, Manor & Shalev, 1996 ; Lewis, Hitch & Walker, 1994). On peut supposer que le code oral - première modalité d'acquisition des mots-nombres par l'enfant - sert de base aux apprentissages symboliques ultérieurs et joue probablement à cet égard un rôle particulier dans le développement des habiletés numériques de base. Quant à la représentation écrite, elle constitue, dans le développement typique, un tremplin pour le développement des habiletés numériques et de calcul. En revanche, son acquisition soulève d'autres problèmes et peut ou non interférer avec l'acquisition du code auditivo-verbal. Mieux comprendre comment se construit la compréhension des nombres et du calcul en parallèle avec le développement du langage permettrait non seulement de guider les pratiques pédagogiques, mais également d'orienter les conduites rééducatives des enfants en difficultés.

Le « sens du nombre », même s'il est présent très tôt dans le développement, continue de s'enrichir et de s'affiner avec les apprentissages symboliques. Il apparaît ici comme le ciment qui permet de lier les différents codes entre eux. Il permet en effet, grâce à une mise en correspondance systématique lors des premières années d'enseignement, de donner du sens aux nombres et au calcul et de favoriser les apprentissages à l'oral et à l'écrit. A la question de savoir comment solliciter le sens des nombres et du calcul, nous considérons que l'estimation numérique constitue un processus de quantification fondamental permettant de mettre en interaction les différentes représentations. Ainsi, quel(s) intérêt(s) et effet(s) peut avoir la sollicitation de ce processus dans les apprentissages numériques à l'école élémentaire et dans le développement atypique ? Comment le sens des nombres se développe à travers les différentes représentations ? Comment ces représentations interagissent-elles au cours du développement ? Et enfin, quelle(s) représentation(s) faut-il préférentiellement mobiliser dans les activités d'estimation numérique ?

L'objectif principal de ce travail est d'analyser les intérêts développementaux, éducatifs et rééducatifs des activités d'estimations et de la mise en correspondance entre les représentations dans le développement typique et atypique. Nous allons ainsi étudier les implications, les applications et les effets de l'estimation numérique et de la représentation analogique dans les apprentissages en mathématiques chez les enfants scolarisés du CP au CE2 ainsi que chez des enfants atteints d'un syndrome génétique (trisomie 21). Ce travail comporte quatre parties.

Dans une **première partie** théorique, nous expliciterons les différents systèmes de représentations (*chapitre 1*) que nous situerons ensuite par rapport aux principaux modèles de traitement du nombre et du calcul (*chapitre 2*). Enfin, nous préciserons leurs évolutions au cours du développement (*chapitre 3*) afin de mieux saisir la complexité des relations entre les représentations et entre les acquisitions.

Dans la **deuxième partie**, nous discuterons du fonctionnement de l'enseignement des mathématiques au CP, ainsi que de ses résultats et des remédiations existantes dans ce domaine (*chapitre 4*). Puis, nous analyserons les effets expérimentaux de la mise en place d'un entraînement systématique à l'estimation et à la mise en correspondance entre les représentations chez des élèves du Cours Préparatoire (*chapitre 5*). Seront également pris en compte dans cette analyse le rôle de certaines variables sociales sur la réussite des apprentissages mathématiques, et leur impact relativement à l'estimation.

Dans la **troisième partie**, nous décrirons d'abord le syndrome génétique de la trisomie 21 et son profil cognitif (*chapitre 6*). Ensuite, nous étudierons l'intérêt et les effets d'un entraînement à l'estimation et au *mapping* dans le développement atypique auprès d'enfants atteints de trisomie 21, un syndrome où les capacités de langage sont particulièrement déficitaires (*chapitre 7*).

Enfin, dans la **quatrième et dernière partie**, nous tenterons de mieux comprendre l'évolution de chaque représentation numérique (orale, écrite et analogique) et de leurs interactions au cours des apprentissages scolaires, du CP au CE2.

En guise de conclusion, nous reviendrons sur les apports de la thèse et sur les intérêts pratiques, pédagogiques et de remédiation qui peuvent en être dégagés en essayant de spécifier davantage les modèles du traitement des nombres et du calcul.

PREMIERE PARTIE

L’acquisition des mathématiques : de l’intuition aux activités complexes

Plusieurs habiletés cognitives générales influencent les apprentissages mathématiques. Par exemple, l'intelligence générale à 11 ans (facteur G de Spearman) serait un bon prédicteur de réussite à 16 ans (Deary, Strand, Smith et Fernandes, 2007). De même, la mémoire de travail et ses composantes seraient impliquées dans la réussite mathématique (DeStefano et Lefevre, 2004 ; Durand, Hulme, Larking et Snowling, 2005 ; Simmons, Willis et Adams, 2012 ; Friso-van Den Bos, van Der Ven, Kroesbergen et van Luit, 2013). L'efficience serait également corrélée avec des habiletés mathématiques basiques comme la compréhension de la magnitude (Booth et Siegler, 2008 ; Jordan, Kaplan, Ramineni et Locuniak, 2009) qui serait elle-même un fondement aux premières acquisitions numériques (Geary, 1994 ; Spelke, 2000).

Récemment, Geary (2011) a montré que le développement des acquisitions mathématiques était en partie lié aux habiletés cognitives générales ainsi qu'aux compétences quantitatives précoces. Plus précisément, la compréhension des relations entre les différentes représentations numériques, la fluence de leurs manipulations, le développement de la ligne numérique mentale et les compétences numériques basiques semblent des prérequis indispensables à l'apprentissage.

Dans cette première partie théorique, nous allons aborder l'ensemble des éléments relatifs à la compréhension des traitements numériques et de leur développement. Ces éléments posent les fondements théoriques des trois parties expérimentales réalisées durant la thèse.

Dans le premier chapitre, nous allons détailler conceptuellement et théoriquement les représentations numériques ainsi que le concept de « ligne numérique mentale ». Le second chapitre sera consacré à la modélisation de ces représentations à travers les modèles de traitement des nombres et du calcul. Dans le troisième chapitre, nous allons situer les acquisitions et l'évolution de ces représentations d'un point de vue développemental.

Chapitre 1

Les différentes représentations numériques : définitions

1. Quantité et nombre analogique

Les premières capacités de quantification solliciteraient les représentations numériques non-verbales ou préverbales (Sarnecka et Carey, 2008). Considéré comme analogique (Dehaene, 1995), il s'agit d'un type de représentation primitif et universel codant le nombre de manière non-symbolique et donc non-verbale. Ce code analogique est indépendant du langage et ne nécessite pas d'acquisition scolaire. Il s'agit de la représentation mentale des quantités, de la magnitude sous forme de grandeur analogique.

La magnitude correspond à une grandeur variable qui peut s'exprimer à travers une représentation qualitative (longueurs, taille). Le modèle de l'accumulateur (Meck et Church, 1983), repris par Gelman et Gallistel (1992) permet de schématiser la représentation de la quantité chez les enfants sous forme de magnitude. L'idée est que face aux objets, la magnitude s'accroît à mesure que le nombre d'objets présent augmente. Mais ce modèle suppose une perception sérielle des quantités signifiant que face à une grande collection le temps de perception devrait être plus long que celui nécessaire pour une petite collection. En réalité, ce n'est pas le cas, puisque pour comparer deux quantités suffisamment discriminables, le temps de réponse sont très rapides et ne suivent pas une fonction linéaire. En revanche, plus la taille de la collection augmente, moins la discrimination est précise et plus elle est floue. Toutefois, le modèle de l'accumulateur reste valide lorsque la perception des nombres est sérielle, comme cela peut être le cas au niveau auditif.

Pour certains auteurs, comme Dehaene et Cohen, c'est au sein de ce code analogique qu'est contenue l'information sémantique des nombres, c'est-à-dire le « sens du nombre » (Dehaene, 1992 ; Dehaene et Cohen, 1995 ; 2000). Il s'agit d'intuitions numériques rapides, automatiques et inconscientes (Dehaene, 2009). Servant ainsi de base aux apprentissages mathématiques ultérieurs, le code analogique s'affine et se précise avec le temps et avec l'expérience. Par la suite, grâce à un *mapping* bidirectionnel, la correspondance entre la magnitude et les nombres symboliques se met en place. Cela permet d'associer les représentations symboliques avec leur signification.

Certains auteurs défendent l'idée que la représentation numérique sous forme de grandeur s'active automatiquement suite à la présentation d'un nombre. Ce phénomène a été montré dans des tâches numériques où son activation n'est pas nécessaire (Pavese et Umiltà, 1998) mais également dans des tâches non numériques comme la comparaison physique de deux nombres (Dehaene et

Akhavein, 1995). Nous reparlerons de ces aspects dans la quatrième partie qui s'intéresse plus spécifiquement au *mapping* et à l'activation de la représentation analogique.

Classiquement dans la littérature, on décrit deux systèmes distincts de traitement de la quantité qui s'activent selon la grandeur de l'ensemble, ainsi qu'un système plus général activé quelle que soit la modalité de la magnitude.

1.1. Le « Système de Localisation d'Objets » ou *subitizing*

Le premier système de traitement, dépend du processus de *subitizing.* Le *subitizing* est un terme introduit en 1949 par Kaufman, Lord, Reese et Volkmann pour désigner le processus spécifique de quantification de petites quantités. Il s'agit de la capacité à quantifier immédiatement une petite quantité sans la dénombrer (Mandler et Shebo, 1982). Cette quantification est rapide (environ 600 ms pour un adulte) et quasiment sans erreurs. Pour certains auteurs comme Gallistel (1988), le *subitizing* n'est pas important pour le développement des habiletés numériques tandis que d'autres le considèrent comme une base aux apprentissages (Schaeffer, Eggleston et Scott, 1974 ; Klahr et Wallace, 1976).

L'habileté à *subitizer* est liée à l'existence d'un système préverbal général appelé « Système de Localisation d'Objets » ou « Object Tracking System » (OTS) (Mandler et Shebo, 1982 ; Spelke, 2008 ; Trick et Pylyshyn, 1994 ; Xu, Spelke et Goddard, 2005). Il enregistre les caractéristiques spatio-temporelles des objets jusqu'à trois ou quatre éléments et permet ainsi de les quantifier immédiatement. Toutefois, il ne s'agit pas d'estimation mais d'un phénomène de perception immédiate, ce qui rend sa compréhension et sa classification complexe. Sa mise en évidence expérimentale repose sur l'augmentation linéaire des temps de reconnaissance pour les quantités supérieures à 4 tandis que les temps de reconnaissance sont stables pour les quantités inférieures à 3 ou 4 objets.

Ce phénomène est probablement lié à la fréquence de situations où ce petit nombre d'objets est rencontré, et aux différentes formes représentationnelles courantes qui existent (doigts, dés, objets de la vie quotidienne ...). Le *subitizing* est parfois assimilé à l'autre système de traitement de la quantité - le système numérique approximatif - car les premiers nombres sont estimés avec précision. Toutefois, la précision de la discrimination de 1 à 3 objets dépasse celle observée selon la loi de Weber, il s'agirait alors plutôt d'une estimation précise (Revkin, Piazza, Izard, Cohen et Dehaene, 2008).

Les auteurs ne s'accordent pas quant au rôle du *subitizing* dans les apprentissages mathématiques. Pour certains, ce processus ne jouerait aucun rôle (Gallistel, 1988), tandis que pour d'autres il serait une base aux habiletés numériques (Klahr et Wallace, 1976 ; Shippley et Shepperson, 1990). Des recherches ont montré que les enfants atteints de dyscalculie développementale présentent des habiletés à *subitizer* déficitaires et une tendance au comptage, même pour quantifier un ensemble limité d'objets (Landerl, Bevan et Butterworth, 2004). Ce constat appuie l'hypothèse selon laquelle l'OTS est nécessaire au développement numérique (Le Corre et Carey, 2007).

Quand on dépasse les possibilités numériques de l'OTS (plus de 4 éléments), le traitement change de nature et un autre système prend le relais : le « Système Numérique Approximatif » ou l' « Approximate Number System » (ANS).

1.2. Le « Système Numérique Approximatif »

Ce système permet de se représenter les nombres de manière approximative dans un format analogique. Face à une quantité supérieure à 4 et en l'absence de temps suffisant pour dénombrer la collection, c'est ce système qui permet de fournir une réponse approximative. Il s'agit d'une quantification avec plusieurs signatures caractéristiques (Piazza, 2010).

L'une de ces caractéristiques est un effet de grandeur, indiquant une quantification de moins en moins précise à mesure que la quantité augmente, avec une variabilité dans les réponses qui suit la loi de Weber (Dehaene, Izard, Spelke et Picard, 2008). Le fonctionnement de l'ANS est également défini par un effet de distance. Par exemple, en situation de comparaison relative de deux quantités (tâche permettant de mesurer l'acuité numérique), on observe cet effet qui révèle que deux quantités sont plus faciles à discriminer à mesure que leur ratio augmente (Halberda et Feigenson, 2008). Ce phénomène a été observé très précocement (chez les bébés dès 6 mois) et il s'affine rapidement avec l'avancé en âge (Halberda et Feigenson, 2008 ; Piazza, Facoetti, Trussardi et al., 2010) et avec la scolarisation (Ramani et Siegler, 2008 ; Siegler et Ramani, 2009).

Ce système serait en forte relation avec les compétences numériques ultérieures puisque les épreuves d'acuité numérique sont de bons prédicteurs de la réussite mathématique (Durand, Hulme, Larkin et Snowling, 2005 ; Gilmore, McCarthy et Spelke, 2010 ; Inglis, Attridge, Batchelor et Gilmore, 2011 ; Libertus, Feigenson et Halberda, 2013 ; Mazzocco, Feigenson et Halberda, 2011). Il existerait aussi une relation inverse entre les compétences numériques et les performances de l’ANS (Halberda, Mazzocco et Feigenson, 2008). En effet, Halberda et ses collaborateurs (2008) ont montré que les performances à une tâche de comparaison numérique non-symbolique sont liées aux performances mathématiques en Maternelle. De plus, les enfants atteints de dyscalculie développementale sont particulièrement déficitaires sur ce type d’épreuve (Butterworth, 2010 ; Piazza et al. ; 2010), ce qui renforce la l’hypothèse de l’importance de l’ANS dans les apprentissages en mathématiques.

Les études menées dans ce domaine ont pu montrer que la représentation des quantités est intermodale et ses propriétés se transfèrent à différentes modalités sensorielles comme par exemple les sons ou les flashs lumineux (Fernandes et Church, 1982). En effet, ces stimuli présentent les mêmes caractéristiques : les réponses sont basées sur la quantité numérique (Brannon, 2002 pour la modalité visuelle ; Lipton et Spelke, 2003 pour les sons ; Xu et Spelke, 2000) et les erreurs se dessinent à travers la loi de Weber (erreurs sont proportionnelles à l’ampleur des informations). Néanmoins, il apparaît plus complexe de combiner les modalités sensorielles, le système étant probablement amodal.

L’ANS apparaît donc comme un système majeur pour la construction des apprentissages numériques symboliques (Dehaene, 2005 ; Hubbard, Diester, Cantlon, Ansari, Opstal et Troiani, 2008). Pour certains auteurs, les apprentissages mathématiques dépendraient spécifiquement de l’ANS qui serait spécialisé dans le traitement des nombres et du calcul numérique (Dehaene, 1997 ; Gilmore, McCarthy et Spelke, 2007 ; 2010 ; Holloway et Ansari, 2008 ; Lipton et Spelke, 2005 ; Park et Brannon, 2013). Pour d’autres, il existerait un système de traitement plus général de la magnitude qui prendrait également en compte des dimensions physique de taille, de durée et non exclusivement les nombres (Lourenco, Bonny, Fernandez et Rao, 2012 ; Lourenco et Longo, 2011).

1.3. Le Système Général de la Magnitude

L’idée de l’existence d’un système général de traitement de la magnitude plutôt que d’un système spécifique aux nombres a émergé suite aux résultats observés dans plusieurs études. Quel que soit le domaine de la magnitude (nombres, taille, durée, ...), les observations sur le plan comportemental, cortical et neuronal montrent des chevauchements (Lourenco et Longo, 2010). Un argument en faveur de ce système est le lien trouvé entre la magnitude et les performances mathématiques à la fois dans une tâche de discrimination numérique mais aussi dans une tâche de discrimination d’étendue spatiale (Lourenco et al., 2012).

Lourenco et ses collaborateurs (2012) demandent à des adolescents de 17 à 21 ans de réaliser deux tâches de comparaison de magnitude (où ils doivent indiquer pour chaque item quelle est la quantité la plus grande ou la plus étendue) ainsi qu'un test mathématique. Les résultats indiquent que les deux tâches sont corrélées avec le test mathématique (en arithmétique et en géométrie). Pour les auteurs, les apprentissages numériques seraient fondés sur un système général de la magnitude partageant des propriétés mais qui pourrait également fonctionner de manière distincte selon son aspect numérique ou non-numérique.

A l'opposé, Hyde, Khanum et Spelke (2014) ne concluent pas à l'implication d'un système général de la magnitude dans l'arithmétique symbolique. Les résultats de leur étude sont en faveur d'un rôle fonctionnel de l'ANS dans les mathématiques. De plus, les signatures typiques de l'ANS se retrouvent dans les performances aux deux tâches non-symboliques justifiant l'implication de ce système spécifique de traitement de la magnitude numérique chez les enfants. Enfin, cette étude montre également qu'un entraînement propre à l'ANS permet d'améliorer la vitesse de traitement et la réussite aux épreuves de mathématiques symboliques.

Les études se positionnent plutôt vers l'implication initiale d'un système spécifique de traitement de la magnitude dans les acquisitions numériques. Mais les débuts du langage et de l'éducation scolaire apportent aux apprentissages de nouvelles dimensions et ils contribuent à la construction des connaissances arithmétiques.

2. Les symboles numériques

Les codes symboliques sont les représentations numériques issues du langage et permettent de désigner précisément les nombres. Ils sont arbitraires et ne contiennent pas de sens sans association à leur grandeur lors des apprentissages. L'acquisition des représentations symboliques est complexe notamment car il n'y a pas de ressemblance entre le signifiant et le signifié (Fayol, 2012). De ce fait par exemple, on ne peut pas, à partir d'un nombre énoncé à l'oral, simplement retranscrire chaque mot par le nombre arabe correspondant car cela conduit à des erreurs de transcodage.

2.1. La représentation orale

Le code auditivo-verbal est la première représentation symbolique rencontrée et pratiquée par l'enfant au cours de son développement. Il s'agit de la représentation symbolique verbale orale des nombres, tel que [/deux]. Les premiers apprentissages numériques formels sont d'abord réalisés à l'oral, et, par mise en correspondance (*mapping*) avec une représentation de la quantité correspondante, les mots-nombres acquièrent leur signification. Le passage d'une représentation quantitative à une représentation précise (le mot-nombre) est le fruit d'un long apprentissage et nécessitera maintes manipulations et supports d'apprentissages (tel que les doigts).

Le système numérique verbal oral est composé de primitives lexicales où chaque mot fait référence à une quantité. Il y a ainsi des mots-nombres qui renvoient aux unités, aux particuliers (« onze » à « seize »), aux dizaines, aux multiplicateurs (« cent », « mille »...) et au « zéro ». Grâce à une syntaxe spécifique, les mots-nombres sont combinés pour constituer des nombres oraux plus grands et plus complexes selon des relations de somme (« cent-dix ») et/ou des relations de produit (« deux cent »). Mais peu importe la combinaison, la représentation auditivo-verbale ne peut faire référence qu'à une quantité spécifique.

La représentation orale des nombres passe par l'apprentissage de la comptine numérique. Cette compétence tarde à faire son apparition alors que les premières acquisitions numériques sont précoces. C'est toute la difficulté du système numérique langagier français puisqu'il est totalement arbitraire et ne dispose d'aucun indice facilitant son apprentissage. Ce codage ne permet pas de faire référence à l'accroissement de la quantité sous-jacente au mot-nombre. Ainsi, les enfants doivent connaître les nombres de un à seize à cause des nombres particuliers et ne peuvent pas simplement raisonner sur la structure du nombre en unités/dizaines (Fayol in Billard et Touzin, 2008). Les enfants doivent ensuite s'approprier et se familiariser avec le lexique et les règles combinatoires (additives : « 110 » et multiplicatives : « 300 »). L'acquisition de la chaîne est longue et difficile avec d'importances variabilités interindividuelles et culturelles (Fuson, Richards et Briard, 1982 ; Ginsburg et Russel, 1981). La lente acquisition de ce codage va se répercuter sur les possibilités des enfants français en mathématiques. Cette perturbation de l'apprentissage n'est pas présente dans les pays asiatiques qui disposent d'un système verbal régulier après 10.

2.2. La représentation arabe écrite

Si la désignation écrite des petits nombres est présente dès la fin de l'école maternelle, le code arabe-écrit n'est réellement enseigné et sollicité qu'au début de l'école primaire. Les représentations arabes écrites sont précises et quasi-universelles car non dépendante de la langue maternelle. Sur la base de primitives lexicales allant de 0 à 9, ce système de notation permet d'écrire tous les nombres existants.

Comme pour le langage oral des nombres, le système de la numération écrite comporte des inconvénients qui peuvent venir perturber son apprentissage. Cette représentation repose une notation positionnelle spécifique avec une valeur qui varie en fonction de la position du chiffre ainsi qu'un rôle différent pour le 0 en fonction de sa position. De même, la correspondance entre l'oral et l'écrit n'étant pas explicite dans la numération de la langue française, l'apprentissage est souvent plus long et difficile que pour d'autres langues. Enfin, il existe une influence visuelle et spatiale dans sa représentation puisqu'elle repose sur le concept de base 10. La valeur du nombre augmente d'une puissance 10 à chaque fois qu'un nombre se décale sur la gauche. Ces deux processus sont l'objet d'un très long apprentissage durant la scolarité.

L'ensemble de ces particularités conduit à des erreurs chez les élèves français d'abord lors du passage aux nombres à deux chiffres puis avec les nombres à *n* chiffres (Fayol, 2012). Le transcodage, capacité de passer d'une représentation à une autre, est un apprentissage qui se fait tout au long de l'acquisition des deux représentations. Il peut également être le fruit de difficultés et d'erreurs. Selon Mirassou (in Chokron et Démonet, 2010), le code verbal oral entrerait tout d'abord en relation avec le code arabe lors des premiers apprentissages mais les deux types de représentations se développeraient ensuite de manière indépendante. Par la suite il semblerait que dans certaines tâches, à chaque confrontation avec un symbole numérique, notre cerveau le traduise automatiquement et rapidement en une quantité approximative qu'il pourra manipuler.

Dans les troubles d'apprentissage, il est probable que certaines difficultés soient liées au transcodage entre un nombre oral et sa traduction en chiffres (Geary et al., 2000). En effet, les enfants acquièrent d'abord le versant oral et auditif des nombres. Par la suite, le versant écrit se développe jusqu'à même prendre le pas sur les acquisitions orales et dominer les apprentissages arithmétiques. La difficulté principale de ce type de transcodage est qu'il n'est pas possible de convertir directement à l'écrit un nombre à l'oral puisqu'ils reposent tous deux sur des codages différents sans lien apparent. Ainsi, les élèves doivent apprendre et mettre en correspondance ces deux codes, ce qui n'est pas sans conséquences sur les apprentissages arithmétiques plus complexes.

Nous venons de préciser les trois types de représentations numériques qui structurent les apprentissages mathématiques. Il existe une forme de représentation imagée sollicitant le nombre et l'espace, qui intègre ces représentations par mise en correspondance et qui permet, lors de son activation, d'apporter un sens aux nombres et aux opérations.

2.3. Interaction entre le nombre et l'espace

2.3.1. La « Ligne Numérique Mentale » (LNM)

Il est bien décrit dans la littérature que les différentes représentations s'intègrent conjointement en une représentation numérique globale : la « Ligne Numérique Mentale » (LNM).

L'hypothèse d'une « Ligne Numérique Mentale » comme forme possible de représentation numérique est apparue à la fin des années 1960. Moyer et Landauer (1967), puis Restle (1970), emploient cette métaphore pour décrire les représentations liées à l'estimation de quantités. La LNM présente la particularité d'être spatialement orientée de gauche à droite dans les cultures occidentales. Ainsi, les nombres évoquent, au delà de la quantité à laquelle ils renvoient, une position dans l'espace. Cette caractéristique est appuyée par l'existence de l'effet SNARC (« Spatial-Numerical Association of Response Codes »). Quand il faut comparer deux nombres, les participants sont plus rapides quand il y a une cohérence entre la position spatiale du nombre sur la LNM et la main qui sert à répondre à la tâche. Dans l'étude de Dehaene, Bossini et Giraux (1993), les participants doivent décider si un nombre est inférieur ou supérieur à 65 en pressant un bouton avec la main droite ou gauche en fonction de la consigne. Les résultats indiquent que lorsque le nombre présenté est supérieur à 65, les participants sont plus rapides si la consigne est de répondre avec la main droite. Inversement, si le nombre est inférieur à 65, ils sont plus rapides en utilisant la main gauche. Les auteurs interprètent ces résultats comme la preuve que la LNM est spatialement orientée de gauche à droite. D'après Hubbard, Piazza, Pinel et Dehaene (2005), le lien entre les nombres et l'espace s'établirait de manière automatique. L'effet SNARC est indépendant de la culture mais en cohérence avec le système de lecture puisqu'il s'inverse si le sens de lecture est de droite à gauche (Dehaene, Bossini et Giraux, 1993 ; Zebian, 2005 et Fischer, Mills et Shaki, 2010). Il est également indépendant de l'éducation (Dehaene, Izard, Spelke et Pica, 2008). Toutefois, pour certains auteurs, l'orientation de la ligne reflète davantage le sens de lecture propre à la culture et non une caractéristique inhérente à la LNM.

Classiquement, pour tester la LNM, on demande aux enfants de marquer la position d'un nombre sur une ligne numérique bornée mais non graduée (*number-to-position*).

2.3.2. Propriétés

La LNM présente les mêmes propriétés que le système numérique approximatif. Dans leur étude originale, Moyer et Landauer (1967) ont évalué les temps de réaction d'adultes lors de comparaison de nombres et ont observé ce qu'on appelle aujourd'hui « l'effet de distance ». Pour cela, ils demandent aux participants d'indiquer, entre deux nombres arabes, lequel est le plus grand (8 ou 6, par exemple). Les adultes prennent plus de temps pour répondre lorsque les deux nombres sont proches en distance numérique que lorsqu'ils sont éloignés. Cet effet illustre le fait que plus l'écart entre deux nombres est important, moins il faut de temps pour les comparer. De ce fait, sur la LNM, les nombres proches sont plus proches et donc plus facilement confondus que les nombres éloignés. Cet effet de distance a été observé pour les nombres arabes écrits et les mots-nombres à l'oral (Buckley et Gilman, 1974).

En règle générale, dans une tâche classique de LNM, les plus jeunes répondent de manière plus exacte et plus précise pour les petits nombres que pour les grands nombres. Il s'agit d'un « effet de grandeur». La précision des représentations diminue avec la taille du nombre. De nombreuses études ont montré que la représentation des nombres sur cette ligne, avant la scolarisation en primaire, se modélise par une fonction logarithmique, où les petits nombres sont mieux représentés que les grands. On observe une diminution de la précision avec l'augmentation de la taille des nombres (Siegler et Booth, 2004 ; Siegler et Opfer, 2003). De ce fait, la représentation logarithmique ne serait pas affectée par le passage des unités aux dizaines. Si de nombreuses études sont en accord avec ce résultat, il repose sur l'hypothèse que les nombres à deux chiffres soient traités de même manière que les nombres à un chiffre, comme une entité. Depuis quelques années, les chercheurs remettent en question cette vision holistique du traitement des nombres à deux chiffres, notamment grâce aux travaux de Nuerk et collaborateurs. Dans les études qu'ils ont menés, ils ont pu constater que les nombres à deux chiffres sont traités de manière décomposée en unités et dizaines et non pas de manière globale; et ce dès l'école primaire (Nuerk, Kaufmann, Zoppoth et Willmes, 2004). Ils demandent aux enfants de dire quel nombre est le plus grand parmi des paires de nombres. Soit l'item est compatible avec une stratégie de comparaison et de décomposition unités/dizaines soit il est incompatible. Leurs résultats indiquent que les enfants sont plus lents et font plus d'erreurs lors des essais incompatibles. Ainsi, il semble que la représentation mentale des nombres est dépendante de leur taille mais aussi du passage à la dizaine. Au cours de l'éducation, la représentation deviendrait linéaire.

Ebersbach et Wilkening (2007) vont encore plus loin dans l'étude de la représentation des nombres sur la ligne numérique mentale. En utilisant un design similaire aux études menées par Siegler, ils observent qu'une fonction linéaire double explique davantage les performances des enfants qu'une fonction linaire ou logarithmique. En s'intéressant au point de rupture, c'est-à-dire le moment où les performances changent brutalement, ils constatent que le modèle de régression linéaire est en fait segmenté. Ils mettent alors en parallèle les points de rupture avec les limites de familiarité des enfants avec les nombres. Il semblerait alors que les difficultés en mathématiques puissent également s'expliquer par une intégration déficiente des dizaines et des unités dans une représentation correcte des nombres à deux chiffres.

Sur la base de l'ensemble de ces résultats, Moeller et collaborateurs, en 2009 cherchent à tester, chez de jeunes enfants cette modélisation bi-linéaire. Dans une tâche de positionnement d'un nombre sur une ligne numérique (*number-to-position)*, des enfants de 7 ans et 4 mois en moyenne situent des nombres sur des lignes allant de 0 à 10 et de 0 à 100. Leurs résultats indiquent que pour les lignes allant de 0 à 10, la représentation des enfants est mieux expliquée par une fonction linéaire (R^2= .87). En revanche, pour les lignes de 0 à 100, la fonction bi-linéaire est plus proche de leurs performances. En effet, le R^2 est de .81 contre .70 pour une fonction logarithmique. Le point de rupture se situe au nombre 10, lors du passage aux dizaines. Cette étude indique que la représentation des nombres sur la LNM ne serait pas logarithmique mais bi-linéaire, avec deux fonctions linéaires séparées, l'une expliquant les nombres jusqu'à 9 et l'autre, les nombres à deux chiffres. Ce type de représentation serait lié, d'après les auteurs, à une moins bonne intégration des nombres à deux chiffres sur la LNM.

Ainsi, différents types de représentations numériques sont impliqués dans les tâches arithmétiques. Ces représentations possèdent des propriétés propres et sont liées à des systèmes de traitements spécifiques. Afin de mieux comprendre comment un nombre ou un calcul est traité par un individu, plusieurs chercheurs ont tenté de modéliser l'ensemble de ces représentations et leurs relations. Nous allons maintenant détailler les modèles les plus influents dans ce domaine et qui servent d'appuis théoriques pour les études réalisées au cours du présent travail.

Chapitre 2

Les modèles de traitement du nombre et du calcul

1. Les études de cas de double-dissociation et les premiers modèles

Les travaux en neuropsychologie et notamment l'étude des cas de double-dissociation ont permis de rendre compte de deux types de traitements distincts : un traitement exact du nombre et un traitement approximatif. En effet certains patients peuvent subir, suite à une lésion, un déficit au niveau du traitement exact alors que leurs capacités de traitements approximatifs sont conservées (Dehaene et Cohen, 1991). D'autres au contraire, présentent des difficultés au niveau approximatif mais peuvent conserver certaines capacités de calcul exact.

A cet argument viennent s'ajouter les découvertes en neuro-imagerie qui ont permis de montrer que des réseaux neuronaux distincts sont impliqués dans les différents types de traitements des nombres. Ainsi, face à un calcul non verbal et analogique, le sillon intra-pariétal serait activé. Quand on réalise un calcul verbal nécessitant une compréhension, les zones cérébrales impliquées dans le traitement du langage s'activeraient simultanément à l'activation du sillon intra-pariétal. Ces deux circuits relativement indépendants mais qui communiquent permettent de mieux comprendre le fonctionnement lors des traitements numériques.

Les études de cas ainsi que les données en neuro-imagerie ont permis d'élaborer des modélisations de la manière dont on traite le nombre et le calcul. Les premiers modèles s'opposaient sur la question de savoir si le traitement des nombres était sémantique ou non.

Le modèle asémantique de Deloche et Seron (1987) s'intéresse au transcodage et se base sur l'analyse psycholinguistique des erreurs produites par des patients aphasiques. Ils observent qu'il existe deux types d'erreurs différentes : sémantiques (« 203 » écrit 21003) ou lexicales (109 écrit 107). Le modèle est constitué de deux étapes : l'étape lexicale (informations sur la classe et la position des nombres) puis l'étape sémantique (règles de transcodages). Toutefois, le traitement n'est pas forcément sémantique lorsque le transcodage s'appuie sur la morphologie des mots-nombres. Ce modèle présente la limite majeure de ne pas considérer la représentation analogique. De plus, il n'explique pas l'origine des erreurs.

Mc Closkey, Caramazza et Basili (1985) proposent un modèle plus étendu que celui de Deloche et Seron. Ils différencient un système lié à la compréhension, un autre lié à la production ainsi qu'un système lié au calcul et introduisent une représentation sémantique entre ces trois modules. Le système de compréhension permet de traduire le nombre écrit ou verbal sous forme interne tandis que le système de production passe d'une représentation interne à un format symbolique. Ces deux systèmes sont distingués pour l'oral et pour l'écrit. Le système de calcul permet de traiter les mots, les signes et les procédures de calcul ainsi que de stocker les faits arithmétiques. Le passage par le système sémantique serait obligatoire. Toutefois, ce modèle a été critiqué puisqu'il ne considère pas le traitement lié à la quantité et au code analogique. De plus, des études ont montré qu'il n'était pas obligatoire de passer systématiquement par une représentation sémantique.

A ce jour, les auteurs se positionnent plutôt en faveur d'un accès à une information sémantique dans certains traitements numériques. Nous allons maintenant développer deux modèles dominants reposants sur ce postulat et sur lesquels nous basons notre travail: le modèle de Dehaene et Cohen (1995) et le modèle de von Aster et Shalev (2007). Ces modèles sont, à ce jour, les plus complets et les plus récents.

2. L'élaboration d'un modèle anatomique et fonctionnel de la construction du nombre (Dehaene)

Dehaene (1992), tout comme McCloskey (1992), considère l'importance de la représentation analogique dans la construction des apprentissages numériques. Ainsi, en 1992, Dehaene introduit une modélisation fonctionnelle du traitement numérique qui permet de rendre compte des processus impliqués dans les différentes tâches numériques. Par la suite, ce modèle sera affiné notamment d'un point de vue anatomo-clinique (Dehaene et Cohen, 1995). C'est un des modèles les plus exploités actuellement car il dispose d'appuis neuro-anatomiques et de données empiriques solides (Fayol, 2012).

Ce modèle (cf. Figure 1) distingue trois codes de traitement, chacun étant associé à des activités numériques particulières : un code non-symbolique (grandeurs, quantité ; versant analogique) et deux codes symboliques (oral et écrit). Ces derniers sont considérés comme des codes asémantiques tandis que le code analogique contiendrait la sémantique des nombres - « le sens des nombres » - et serait indépendant du langage. C'est par connexion avec le code analogique que les symboles numériques et les calculs acquièrent ensuite une signification numérique.

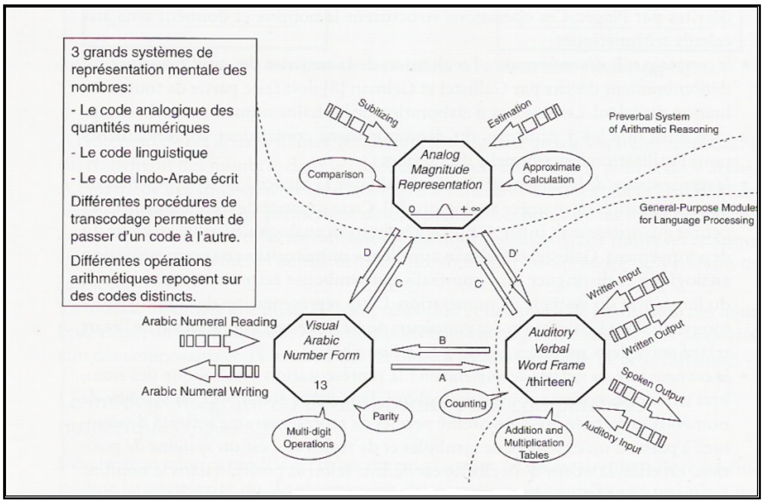


Figure 1. Modèle du triple code (repris de Habib, Noël, George-Poracchia et Brun, 2011)

2.1. Les trois codes

Le code analogique fait référence à la représentation préverbale des nombres sous forme de grandeurs. Il permet de réaliser des activités de comparaison et de calculs approximatifs. Il est impliqué dans le *subitizing* (en mobilisant l'Object Tracking System, OTS) ou dans l'estimation (avec l'Approximate Number System, ANS). Dans le modèle de Dehaene et Cohen, la place accordée à la représentation analogique est centrale puisque c'est elle qui donne sens aux symboles.

Le code auditivo-verbal ([/trois]) correspond à la désignation auditive et verbale des nombres. Il renvoi également à la forme écrite des nombres en lettres. D'après le modèle, ce format permet les activités de comptage, le calcul mental simple et le stockage en mémoire des faits numériques (tables d'aditions et multiplications).

Le code arabe écrit représente la forme écrite en chiffres des nombres (« 3 »). Il permet de résoudre des opérations complexes à plusieurs chiffres et des activités de jugement de parité.

D'un point de vue fonctionnel, les trois codes sont liés de manière indépendante et permettent par mise en correspondance de réaliser des tâches de transcodages numériques ou de *mapping*. Les mises en correspondance peuvent être directes et asémantiques (transcodage du code oral à l'écrit et inversement), directes et sémantiques (oral ou écrit vers l'analogique et inversement) ou indirectes et sémantiques (passage nécessaire par le code analogique).

2.2. Les circuits cérébraux des représentations numériques

Les données anatomo-fonctionelles établies en 1995 par Dehaene et Cohen ont permis d'établir une cartographie cérébrale du modèle fonctionnel (cf. Figure 2). Chaque code est ainsi associé à une localisation et un circuit cérébral qui peut, en cas de lésion, induire un déficit spécifique.

C'est dans le sillon intrapariétal (segment horizontal) qu'est traitée l'information sémantique ; le code analogique. Ce sillon serait activé pour toutes les tâches numériques sans distinction : calcul, comparaison, estimation ... (Dehaene, Piazza, Pinel et Cohen, 2003). Il s'active surtout face aux représentations numériques et ce de manière croissante en fonction de la distance ou la quantité numérique (Pinel, Dehaene, Riviere et LeBihan, 2001). De ce fait, le sillon intrapariétal correspondrait au lieu de stockage des connaissances sur les quantités numériques.

Le gyrus angulaire gauche serait activé dans les tâches verbales numériques et non numériques. Cette zone serait impliquée pour les calculs mémorisés dépendants du langage (calcul exact, multiplication, ...). On considère qu'elle serait la localisation du codage verbal des faits numériques.

Enfin, la région pariétale supéro-postérieure bilatérale s'activerait dans les tâches visuo-spatiales. Au niveau numérique, elle serait liée à la soustraction, l'approximation ou dans les tâches de ligne numérique mentale. Ainsi, elle est assimilée à la zone d'activation de la ligne numérique mentale.

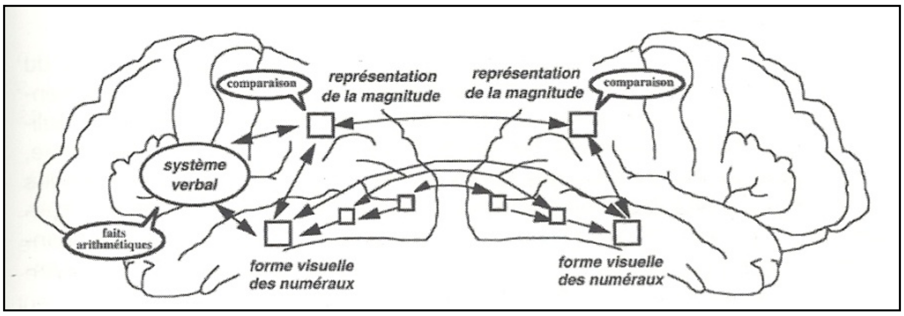


Figure 2. Représentation anatomique du modèle du triple code
(Dehaene et Cohen, 1995)

Une limite importante de ce modèle est qu'il ne permet pas de rendre compte de l'évolution de la construction des nombres et du calcul d'un point de vue développemental, bien qu'il implique des hypothèses développementales fortes, notamment en ce qui concerne le rôle du « sens du nombre ». De plus, il repose sur des données d'études menées principalement chez l'adulte, ce qui renvoie à un fonctionnement mature et abouti.

3. Le développement de la cognition mathématique d'après le modèle de Von Aster et Shalev (2007)

Pour pallier ces limites, Von Aster et Shalev (2007) ont élaboré un modèle développemental de l'acquisition des nombres (Figure 3). Ce modèle décrit quatre étapes successives et hiérarchiques qui permettent de situer les troubles du calcul sur un continuum développemental. Il permet également de situer les différentes origines des troubles du nombre et du calcul.

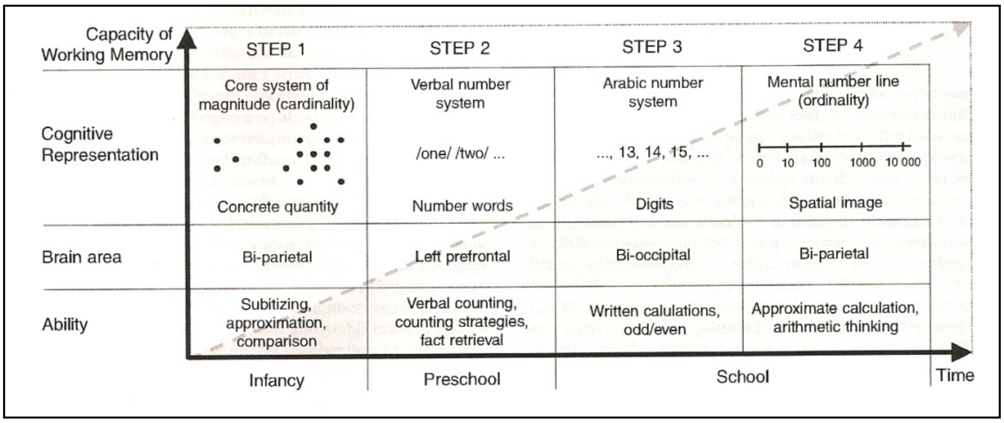


Figure 3. Modèle développemental de la cognition numérique (von Aster et Shalev, 2007)

3.1. Les étapes du modèle

Dans ce modèle, le sens premier des nombres passe par un système de représentation des magnitudes, présent dès la petite enfance. C'est sur cette base que viennent ensuite se greffer les nombres symboliques oraux puis écrits, après avoir été mis en correspondance avec la grandeur numérique correspondante.

D'après le modèle, cette mise en correspondance permet de construire dans les étapes plus tardives une représentation graduée et ordinale des nombres. Cette représentation correspond à la « ligne numérique mentale ». Elle se construit au fur et à mesure du développement ; d'abord avec les grandeurs, puis les nombres oraux et enfin les nombres écrits. Progressivement, cette représentation est enrichie au fil des expériences et de la scolarisation. Von Aster et Shalev (2007) précisent également dans leur modèle les compétences rendues accessibles à chaque étape, ainsi que les zones cérébrales impliquées.

Le système fondamental de la magnitude correspond à la représentation analogique et constitue la première étape du modèle. Il permet de quantifier les petites collections et comparer les quantités. Tout comme dans le modèle de Dehaene, c'est dans ce système qu'est contenue « l'intuition » numérique, la signification primitive des nombres. Ce système serait un prérequis pour les apprentissages numériques et permettrait aux enfants d'apprendre à associer les quantités à des mots-nombres puis aux chiffres arabes. Toutefois, les auteurs - adeptes de la conception nativiste - considèrent que ce système serait inné et hérité dès la naissance.

Avec l'éducation formelle et au fur et à mesure des mises en correspondance, l'acquisition et la compréhension des codes symboliques se développeraient. Ce n'est qu'après l'intégration des deux codes symboliques que chacun peut, en dernier lieu, élaborer la ligne numérique mentale (LNM). Il s'agit d'une représentation mentale ordonnée des nombres qui organise les traitements numériques. Cette étape constitue l'intégration complète des différentes représentations entre elles. Une fois la ligne élaborée, elle continue de se développer et de se préciser et les élèves l'utilisent pour se représenter les nombres et calculer.

Le langage et la mémoire de travail (Durand et al., 2005 ; Friso-van Den Bos et al., 2013) jouent également un rôle dans la construction des connaissances numériques. En effet, le développement de l'ensemble de ces étapes n'est possible qu'avec le développement de la capacité de la mémoire de travail, qui serait fortement associée à l'âge et dépendante de la maturation.

3.2. Développement des troubles du calcul

Le modèle permet de décrire plusieurs origines aux troubles du nombre et du calcul selon l'étape où interviennent les difficultés. Une perturbation de l'étape initiale aurait pour une conséquence une perturbation des étapes suivantes. En effet, compte tenu du caractère intégratif des étapes, une perturbation à l'une d'elle entraîne une perturbation générative aux suivantes. De plus dans ce modèle, on met en avant l'importance des capacités attentionnelles et de la mémoire de travail dans le développement des compétences numériques. Une altération de celles-ci peut également être à l'origine de troubles à chaque étape.

Ainsi, si l'étape initiale du système de traitement de la magnitude est déficitaire, aucune signification ne peut être donnée aux nombres symboliques. Seul un apprentissage par cœur de ces représentations est possible. Dans ce cas de figure, les personnes peuvent être atteinte de « dyscalculie profonde ».

Si cette première étape est effective mais que l'étape 2 ou 3 est déficitaire à cause d'un trouble de développement du langage, les associations entre les deux représentations ne peuvent s'effectuer. Si l'étape 2 est perturbée, les performances de calcul, de comptage ou la récupération des faits numériques sont déficitaires. S'il s'agit de l'étape 3, les difficultés se retrouvent au niveau de la notation positionnelle du nombre et du principe décimal aboutissant ainsi à des erreurs d'écriture de nombres. Des répercussions importantes touchent aussi le développement du calcul mental. Dans les deux cas, cela peut entraîner une dyscalculie avec un autre trouble associé (la dyslexie par exemple).

Enfin, une perturbation de l'étape 4 induirait des difficultés sur les apprentissages plus tardifs comme le raisonnement mathématiques provoquant alors des troubles conceptuels ou de la logique.

3.3. Limites

Le modèle de Von Aster et Shalev (2007) permet de décrire l'enchaînement des étapes d'acquisition en mathématiques d'un point de vue développemental. Toutefois, il suggère que ces étapes se succèdent de manière indépendante, sans tenir compte de leurs interactions au cours du développement. L'intégration se ferait uniquement à la dernière étape alors qu'elle débute dès les premiers apprentissages. L'étude expérimentale que nous présenterons dans la quatrième partie a pour objectif de mieux préciser les liens entre ces étapes, leurs interactions ainsi que les conséquences sur le développement des acquisitions numériques.

Rappelons que le développement des différentes habiletés mathématiques se fait progressivement en fonction de la familiarisation avec chacune des représentations numériques et de leurs interactions. Ainsi, le développement des compétences numériques est lié au développement des connaissances propres à chaque type de représentation et aux habiletés de transcodage. Le modèle de von Aster et Shalev, permet en partie de rendre compte du développement de ces représentations. Toutefois, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, les auteurs omettent un élément important du développement : les différentes représentations sont en interaction constantes et mutuelles. Nous allons voir également à quel point le lien entre ces codages est complexe tout au long des apprentissages, dans la petite enfance d'une part, puis à l'âge préscolaire et scolaire.

Chapitre 3

Le développement des compétences numériques de la petite enfance à l'âge scolaire

1. Bref retour historique

Depuis plusieurs décennies, les chercheurs s'interrogent sur la spécificité du domaine numérique et son développement ontogénétique et phylogénétique.

Les premières études - longtemps influencées par les travaux menés par Piaget et le constructivisme piagétien - postulaient que l'enfant ne maitrisait pas le concept du nombre avant 7 ans. Le positionnement de Piaget quant aux traitements numériques correspond davantage à une vision des compétences numériques comme une habileté globale (Piaget, 1952). Ainsi, d'après Piaget, jusqu'à 18 mois environ, le bébé est au stade « sensori-moteur ». Il est alors capable d'explorer l'environnement d'un point de vue sensoriel et avec un contrôle moteur. Ensuite, par observation et internalisation des règles stables de l'environnement, l'enfant construirait petit à petit des connaissances mathématiques et logiques. Le principe de conservation du nombre serait alors une étape clef de la compréhension mathématique. Avant cette acquisition, il n'y aurait pas de véritable représentation numérique chez les bébés.

Toutefois, quelques décennies plus tard, plusieurs résultats expérimentaux montraient que les très jeunes enfants seraient en mesure de traiter le nombre de manière visuo-spatiale et non langagière. Ainsi, de nombreux chercheurs se sont intéressés aux compétences numériques précoces et ont montré que les bébés sont capables de discriminer des numérosités, de comprendre les relations entre deux quantités ainsi que de comprendre et anticiper le résultat de situation d'ajout ou de retrait sur une quantité. Ces résultats amènent alors à reconsidérer la thèse piagétienne en reprochant notamment à Piaget d'utiliser des épreuves verbales qui ne permettent pas de révéler les compétences des jeunes enfants. Aussi, les questions posées aux enfants sont trop complexes, le langage faisant obstacle. De plus, l'interprétation et la compréhension des enfants sont différentes de celles des adultes. En réalisant le même type d'épreuve sans recourir au langage, on a pu constater que les enfants sont bien capables d'une compréhension rudimentaire. Bien sûr, il est probable que ces deux types d'activités ne mesurent pas exactement les mêmes processus. Toutefois, il semblerait que les épreuves utilisées par Piaget n'étaient pas adaptées pour étudier les prémisses de la représentation et de la compréhension du concept de nombre chez l'enfant.

Néanmoins, Piaget a été le premier à parler d’intelligence préverbale chez le bébé et c’est aussi grâce à ces travaux que les études sont sur le développement cognitif de l’enfant dès le plus jeune âge ont pu émerger.

Deux courants se sont alors opposés dans les études expérimentales : le nativisme et le constructivisme post-piagétien. Le nativisme, qui considère une continuité entre l’animal et l’homme, postule que les compétences numériques découvertes chez les animaux se rapprochent de celles des bébés et des êtres humains. Il y aurait ainsi un « état initial » de connaissances pour certaines facultés mentales. Depuis, plusieurs contre-arguments sont venus en porte-à-faux à ce courant. Le noyau de connaissance supposé présent dès la naissance n’a en réalité été observé qu’à partir de 2 mois (Spelke, 2000). De plus, les nativistes ne prennent pas en compte l’aspect développemental des acquisitions et le poids de l’environnement, comme si aucune évolution n’était possible après la naissance.

Le constructivisme post-piagétien (notamment avec Fuson, 1988, 1995) intègre les contraintes précoces et le poids de l’environnement socio-culturel. Ce courant prend en compte les connaissances précoces sans considérer pour autant qu’elles soient innées. Ces connaissances s’enrichissent avec l’âge et l’expérience de chaque enfant.

Si l’existence de capacités précoces de quantification est aujourd’hui largement montré, deux positionnements théoriques différents s’opposent quant à leur nature : le premier plaide l’existence d’un système numérique inné de traitement analogique et le second repose sur des mécanismes non numériques (capacités pré-attentionnelles et de représentation ainsi qu’un mécanisme analogique perceptif).

Des auteurs comme Gallistel et Gelman (1992) ou Wynn (1995) considèrent qu’il existe un système inné de traitement des quantités (cf. le modèle de l’accumulateur de Meck). Il y aurait ainsi une base phylogénétique aux capacités numériques précoces. Dans ce modèle, les représentations des quantités sont variables mais se distribuent normalement autour d’une moyenne. Plus la quantité à évaluer est importante plus la variabilité est marquée. Dehaene s’inscrit dans ce courant de pensée et développe l’idée un mécanisme inné de détection numérique présent aussi chez les animaux qui se développeraient tout au long de l’enfance. Les études chez l’animal par exemple, ont montré que les animaux sont capables de discriminer des quantités selon un certain rapport sans connaître les symboles numériques et sans apprentissage préalable (Brannon, 2005 ; Mechner, 1958). Cette représentation primaire des nombres serait traitée par le « système numérique approximatif (ANS). Elle est présente très précocement chez les bébés puis plus tard chez les adultes qui maîtrisent le langage et les représentations symboliques des nombres. Dehaene, inspiré de l'idée de l'accumulateur, défend également l'idée d'une « ligne numérique mentale » comme représentation mentale des nombres.

Le second positionnement considère que les compétences précoces ne sont pas liées à des traitements numériques. Par exemple, les capacités de *subitizing* visuel seraient liées à un mécanisme de localisation spatiale des items et d'individuation (Trick et Pylyshyn, 1993 ; 1994). Pour Simon (1997), c'est l'individuation des éléments à traiter et la conservation d'une trace en mémoire qui explique les compétences des bébés dans l'étude de Wynn. Simon défend l'idée d'un traitement général qui permet de rendre compte des capacités de traitement multimodales. Enfin, d'autres auteurs (Feigenson, Carey et Spelke, 2002 ; Rousselle, Palmers et Noël, 2004) évoquent une hypothèse perceptive pour expliquer les capacités précoces. En effet, on ne peut pas démontrer que les bébés se basent uniquement sur la numérosité pour discriminer les collections. Les compétences des bébés seraient alors plutôt expliquées par des variations perceptives. Toutefois, ces différentes explications non numériques ne permettent pas de rendre compte de l'ensemble des observations issues des études chez le bébé.

A ce jour, il semblerait alors que deux mécanismes coexistent chez le bébé : un mécanisme perceptif de traitement analogique et un système de traitement général d'individuation spatiale et de mémorisation.

Comme nous l'avons évoqué plus haut, le modèle de von Aster et Shalev (2007) permet de modéliser et de rendre compte de l'évolution des acquisitions numériques au cours du développement. Nous allons maintenant évoquer les résultats expérimentaux qui ont participé à l'élaboration des modèles de traitement des nombres, mais également celles menées plus récemment qui permettent d'affiner notre compréhension de ce domaine.

2. Les acquisitions numériques précoces

Les études chez le bébé sont pertinentes pour découvrir et analyser les compétences initiales qui influencent ou déterminent le développement de la cognition numérique. Toutefois, il n'est pas toujours aisé d'étudier et d'interpréter les performances des enfants si précocement. Les études chez le bébé utilisent principalement le paradigme d'habituation et se basent sur l'analyse des temps de fixation oculaire en situation de discrimination numérique (symbolique ou non).

2.1. La discrimination numérique chez le bébé

Dès 6 mois, les bébés savent discriminer deux quantités dans un rapport de 2 à 1 avec par exemple 8 contre 16 objets, même en contrôlant les variables continues telles que la taille des éléments ou la densité (Brannon, Abbott et Lutz, 2004 ; Xu et Spelke, 2000). Il semblerait même que, dès la naissance, les enfants présentent une sensibilité à la congruence entre les nombres, qu'ils soient présentés dans la modalité auditive ou visuelle, ce qui est en en faveur de l'existence de connaissances numériques intermodales chez les bébés (Izard, Sann, Spelke, et Streri, 2009).

L'une des premières études à montrer que les bébés reconnaissent les petites quantités a été réalisée par Starkey et Cooper en 1980. Avec un paradigme d'habituation, ils ont mesuré les temps de fixation oculaire chez des bébés de 16 à 30 semaines lorsqu'on leur montre une diapositive avec 2 et 3 points ou 4 et 6 points noirs. Les résultats indiquent un temps de fixation supplémentaire lorsque la quantité change, indiquant que les bébés discriminent les quantités 2 et 3 puisqu'ils réagissent au changement de numérosité. En revanche, les bébés ne font pas la différence pour 4 et 6 points. Les auteurs concluent que dès 22 mois, les enfants sont en mesure de se représenter et de mémoriser les petites quantités. Par la suite, d'autres chercheurs ont retrouvé les mêmes résultats à partir de 6 mois d'âge, et même quelques jours après la naissance (Antell et Keating, 1983).

Strauss et Curtis (1981) ont observé les capacités de bébés de 10 à 12 mois à discriminer 2 à 5 objets homogènes ou hétérogènes sur des photographies. Durant la phase d'habituation, ils ont présenté des diapositives de deux patterns contenant 2 à 5 objets (maisons, animaux…). En fonction des conditions, les deux patterns représentaient le même nombre et type d'objet (condition homogène) ou seulement le même nombre (condition hétérogène). Ensuite, durant la phase de test, chaque diapositive contenait un pattern avec un objet de plus ou de moins. Les résultats indiquent que, quel que soit le type d'objets, les bébés de 10 à 12 mois réussissent bien à discriminer 2 contre 3 objets mais qu'au-delà et pour un écart d'un objet (3-4, 4-5 objets), ils y arrivent de moins en moins. Ainsi, la variation perceptive de l'objet n'influence pas la réaction des enfants.

Plus récemment, Xu et Spelke (2000) ont demandé à des enfants de 6 mois de discriminer différentes quantités d'objets. Les enfants sont capables de discriminer 8 objets de 16 mais pas 8 de 12 (rapport de 2 à 3). Les auteurs concluent que la capacité à se représenter les numérosités est présente très précocement, avant le développement langagier et les apprentissages numériques symboliques. D'autres études présentent des résultats similaires avec une discrimination possible pour 4 contre 8 et 16 contre 32 mais pas 16 contre 24 éléments (Xu, 2003 ; Xu, Spelke et Goddard, 2005 ; Wood et Spelke, 2005 ; Brannon, Abbott et Lutz, 2004).

Les résultats de ces études sont en faveur de l'existence d'une capacité à discriminer les quantités avant toutes acquisitions langagières verbales ou écrites. Dès 6 mois, les bébés sont en mesure de distinguer des objets dans un rapport 1 à 2. Dès 9 mois, la discrimination est possible dans un rapport de 2 à 3 ; leurs compétences se rapprochant alors des capacités de discrimination adultes. Cette compétence ne serait donc pas uniquement liée à l'éducation formelle, mais préexisterait déjà très précocement. En revanche, quand on dépasse les petites quantités, le traitement numérique est lié à un processus différent, puisque les jeunes enfants répondent plutôt de manière approximative (Mix, Huttenlocher et Levine, 2002), sollicitant le système numérique approximatif.

2.2. Une perception multimodale du nombre

Il semblerait que les compétences numériques des bébés soient multimodales. En effet, des études ont montré qu'ils étaient capables de discriminer des sons. Cette découverte fait suite à l'observation de Bijeljac-Babic, Bertoncini et Mehler (1993) concernant la capacité des bébés à décomposer des sons de parole en syllabes. Ils ont montré que les bébés de 4 jours sont capables de discriminer des sons de 2 et 3 syllabes.

Plus récemment, Lipton et Spelke (2003) ont étudié les capacités des bébés de 6 à 9 mois à discriminer de longues séquences sonores. Dès 6 mois, les bébés sont en mesure de discriminer 8 sons de 16 sons mais pas 8 de 12. A 9 mois, les enfants semblent augmenter leurs habiletés discriminatoires puisqu'ils sont en mesure de discriminer 8 sons de 12. Il semble alors que dès le plus âge, les bébés perçoivent des quantités plus ou moins grandes et les distinguent, et que leurs compétences augmentent très rapidement avec l'âge pour ce type d'épreuve. Et cela bien avant l'acquisition du langage.

De la même manière, les enfants seraient capables de discrimination dans des contextes non directement numériques avec des séquences d'actions. Par exemple, dès 6 mois, ils seraient en mesure de discriminer un nombre d'action comme un nombre de sauts (Wood et Spelke, 2005 ; Wynn, 1996).

Est-ce que les jeunes enfants perçoivent le nombre de manière indépendante à la modalité visuelle ou auditive ? Starkey, Spelke et Gelman (1983 ; 1990) ont présenté à des bébés de 6 à 8 mois des diapositives composées à droite de deux objets communs et à gauche de trois objets. En parallèle, les bébés pouvaient entendre une séquence sonore. Les résultats indiquent que les bébés regardent plus longtemps la diapositive contenant le même nombre d'objet que le nombre de sons. Ainsi, les enfants sont capables d'apparier les nombres dans des modalités sensorielles différentes et ce dès le plus jeune âge. L'explication apportée par les auteurs est que les enfants perçoivent les sons ou les configurations géométriques comme des nombres.

L'étude d'Izard, Sann, Spelke et Streri (2009) apporte également un éclairage sur la question. Les chercheurs étudient les capacités discriminatoires numériques chez les nouveaux nés. Pour cela, ils présentent à des bébés de quelques heures des associations de sons et d'objets et observent les temps de regard. Les résultats indiquent que les nouveaux nés discriminent des appariements congruents de 4 à 18 objets avec des séquences sonores. Ils regardent significativement plus longtemps les quantités congruentes avec les sons présentés durant la familiarisation dans un ratio de 3 à 1 (4 contre 12 ou 6 contre 18).

Mais les résultats de ces différentes études sont discutables quand il s'agit d'interpréter les capacités observées en termes de compétences numériques ou de compétences non spécifiquement numérique. Ces résultats n'ayant pas toujours été répliqués et certaines études trouvant des résultats contradictoires, il est difficile à ce jour de statuer sur l'indépendance de la représentation numérique chez le jeune enfant.

2.3. Des connaissances plus complexes dès la naissance ?

Les compétences numériques précoces ne se limiteraient pas à une sensibilité à la numérosité ou à des capacités de discrimination.

Certaines études se sont attardées aux compétences additives et soustractives des bébés. Wynn (1992) a ainsi testé chez des bébés de 4 à 5 mois les opérations d'addition et de soustraction, en montrant des capacités précoces de compréhension pour ces deux opérations à travers le paradigme de l'événement impossible. Pour Wynn (1992 ; 1995), les bébés s'attendent à une modification du nombre d'objet et ont des attentes précises quant au résultat. L'existence de ces compétences proto-arithmétiques est liée d'après Wynn à la présence d'un système numérique conceptuel dès la naissance qui traiterait les relations de quantités et d'équivalences entre numérosités. Tous les auteurs ne partagent pas ce positionnement notamment car les résultats de Wynn sont difficilement réplicables. De plus, le développement des compétences proto-arithmétiques remet en cause ce postulat car dans des situations additives et soustractives, les enfants de 2 ans et demi se comportent aléatoirement (Vilette, 2002 ; Vilette et Mazouz, 1998).

Nous avons vu que les capacités de discrimination chez les enfants évoluent très rapidement avec l'âge. En effet, les bébés sont capables très précocement de percevoir les quantités et de les discriminer dans les modalités visuelles et auditives quand le ratio est de 3 :1 (Izard et al., 2009). A 6 mois, les capacités discriminatoires s'améliorent avec une réussite pour un ratio de 2 :1 (Lipton et Spelke, 2003 ; Xu et Spelke, 2000) dans les deux mêmes modalités. A l'âge de 9 mois, le ratio de discrimination est de 2 :3.

C'est l'existence de ces connaissances numériques préverbales, basée sur une représentation analogique des nombres, qui justifie initialement le rôle cette représentation spatiale et non-verbale dans les acquisitions arithmétiques symboliques. Sans en connaître la référence symbolique exacte, les enfants sont en mesure de percevoir et discriminer les petites quantités. Par la suite, ils seront en mesure de donner un sens à ces capacités de discrimination en terme de « plus » ou « moins ». La représentation analogique est d'ailleurs le premier format impliqué dans la construction de la ligne numérique mentale, élaborée et affinée au fur et à mesure des apprentissages.

En revanche, leurs compétences mathématiques restent limitées. S'ils sont sensibles à la numérosité et en mesure de différencier des quantités visuelles ou auditives, ils ne sont bien évidemment pas encore en mesure d'utiliser le comptage exact puisqu'il faut attendre les premiers apprentissages symboliques qui ont lieu à l'âge préscolaire et scolaire.

3. Acquisitions à l'âge préscolaire et scolaire

Pour les enfants d'âge préscolaire et scolaire, les activités numériques se diversifient : quantification approximative, dénombrement exact, numération, calculs et résolution de problèmes (Siegler, 1996). Au cours de l'apprentissage de ces différentes tâches, l'ensemble des représentations numériques est sollicité, tantôt de manière isolée et tantôt conjointement.

3.1. Avant les premiers apprentissages formels

Les bébés présentent dès la naissance une sensibilité à la quantité et sont en mesure de discriminer relativement deux quantités d'une grandeur limitée et selon un certain ratio. Même si leurs connaissances arithmétiques continuent de se développer et de s'affiner, elles sont limitées par la non-maîtrise du codage symbolique des nombres.

Dès 16 mois, les enfants sont en mesure de comprendre la notion de « le plus » mais pas celle de « le moins » (Cooper, 1984 ; Strauss et Curtis, 1984). Brannon (2002) observe ce phénomène déjà à l'âge de 11 mois avec un matériel probablement plus propice à l'observation de ce phénomène. D'autres études retrouvent, entre 10 à 12 mois, une préférence vers la quantité la plus grande (Feigenson et Carey, 2003 ; Feigenson, Carey et Hauser, 2002). Ainsi, la compréhension des relations entre les quantités se met en place progressivement vers un an.

Avant de commencer l'école, les enfants peuvent apprendre des faits arithmétiques simples spontanément ou avec l'entourage (Griffin et Case, 1997 ; Hughes, 1986). Toutefois, malgré ces acquisitions informelles, leurs connaissances se limitent aux petits nombres avec lesquels ils sont familiers. Dès l'âge de 5 ans, ils seraient en mesure de comparer deux grandes quantités présentées de manière simultanée (Barth, La Mont, Lipton et Spelke, 2005). Les auteurs ont montré qu'avant l'école élémentaire, les enfants sont capables de discriminer deux quantités dont l'une est cachée et même de les additionner puis de comparer leur somme à une autre quantité. Il semblerait également que les enfants présentent les mêmes capacités quand les quantités sont remplacées par des sons. Ainsi, les enfants de 5 ans sont capables de comparer et d'additionner des quantités numériques et sonores et ce, même avec une connaissance très faible de l'arithmétique symbolique.

De Hevia et Spelke (2009) se sont intéressés à la ligne numérique mentale et à un biais spatial connu chez les adultes. Quand on demande à un participant de marquer le milieu d'une ligne séparant deux nombres, on constate que les participants présentent un biais spatial vers le nombre le plus grand, indépendamment de sa position spatiale (de Hevia, Girelli et Vallar, 2006 ; Fischer, 2001). Ce biais indique que la longueur et la numérosité sont mis en correspondance à travers la LNM. Leurs résultats indiquent que les enfants de 5 ans présentent également ce biais spatial, ce qui implique que la LNM puisse être sollicitée dès cet âge là. Ainsi, le *mapping* bidirectionnel entre les nombres et l'espace commencerait déjà avant l'instruction formelle et symbolique qui débute réellement en Cours Préparatoire.

3.2. Les apprentissages symboliques

Très précocement dans le développement, on observe une forte mobilisation du système verbal oral avec l'acquisition de la comptine numérique (de 2 à 6 ans en moyenne).

Plusieurs opérations concrètes sont acquises de 5 à 7 ans comme la réversibilité, la conservation, la classification (dès 4 ans) qui permettra d'accéder à l'aspect cardinal du nombre, la sériation (autour de 7 ans) qui met en place la propriété ordinale du nombre , ...

3.2.1. La comptine numérique

La chaîne numérique verbale de 0 à 20 s'acquiert progressivement et lentement entre 2 et 6 ans car l'enfant doit apprivoiser un vocabulaire numérique précis et complexe (Mirassou in Chokron et Démonet, 2010). Mais avant l'âge de 3 ans, les enfants ne sont pas en mesure d'associer le nom des nombres à leur cardinalité. La variabilité interindividuelle est importante puisque les capacités préscolaires jouent un rôle dans la vitesse d'acquisition de la chaîne numérique.

La représentation verbale orale des nombres commence à être reconnue comme une catégorie spécifique vers 2 ans et demi selon Gelman et Gallistel (1978, cités par Noël, 2005b) mais s'acquière véritablement vers 6 ans (Fuson, Richards et Briars, 1982, cités par Noël, 2005). C'est notamment à cet âge que les enfants connaissent la suite de nombres de 1 à 20. Pour Noël (2005), les résultats de Gelman et Gallistel peuvent toutefois être nuancés car son étude montre que les enfants réussissent à juger si des mots présentés à l'oral sont des nombres avec un pourcentage de réussite de plus de 80% à 5 ans seulement.

Fuson (1988) s'est intéressée de près à l'acquisition de la suite numérique verbale. Elle a décrit 5 niveaux de construction de la chaîne :

- « en chapelet » : la suite n'est pas segmentée ;
- « non sécable » : on commence toujours à un ;
- « sécable » : on peut commencer n'importe où dans la suite ;
- dénombrable : comptage en l'absence d'objets et la suite peut se dénombrer ;
- bidirectionnelle : possibilité de regrouper et décomposer.

Jusqu'à l'âge de 3 ans, les noms sont récités dans un ordre insécable et sans attribution de sens aux mots-nombres. Vers 4 ans, la suite devient sécable ce qui permettra la correspondance terme à terme. La compréhension du suivant et du précédent a lieu vers 5 ans, moment où les relations entre les mots de la chaîne sont perçues. Enfin, vers 6 ans, le sens des mots-nombres est acquis.

L'acquisition se fait toujours comme suit : les enfants apprennent d'abord les chiffres de 1 à 9 puis de manière différée les particuliers. Ils devront ensuite se familiariser avec les règles morphosyntaxiques des mots-nombres. C'est l'automatisation de l'énonciation de la chaîne numérique qui permettra d'améliorer par la suite les compétences de dénombrement.

L'apprentissage de la chaîne numérique verbale se fait pour la plupart des enfants conjointement avec l'utilisation des doigts pour formaliser le nombre. Ce support permettra de désigner le nombre de manière symbolique physique avant de savoir écrire les nombres. Il sera également utilisé ensuite pour le calcul ou le dénombrement.

3.2.2. L'utilisation des doigts

La représentation morphologique des nombres sur les doigts apparaît pour certains auteurs comme déterminante dans les acquisitions numériques ultérieures (Fayol, Marinthe et Barrouillet, 2004). Quand les élèves apprennent à compter vers 4-5 ans, on constate de grandes différences de performances. Pour Fayol, Marinthe et Barrouillet (2004), cela pourrait être lié à un déficit dans la représentation des nombres sur les doigts. C'est dès l'âge de 2-3 ans que les jeunes enfants commencent à utiliser leurs doigts pour matérialiser l'ajout et le retrait sans qu'il n'y ait eu au préalable d'enseignement de cette technique. Les études en neuropsychologie (Butterworth, 1999 ; Gerstmann, 1930 ; Kinsbourne et Warrington, 1962 ; 1963) ont montré qu'il existait bien une relation fonctionnelle entre les nombres et la représentation sur les doigts puisque l'acquisition des compétences numériques est perturbée en cas de représentation déficitaire sur les doigts.

Fayol, Barrouillet et Marinthe (1998) ont montré que le niveau de performances perceptivo-tactile à 5 ans est un meilleur prédicteur des performances en mathématique à 5 et 6 ans que le niveau de développement. D'autres auteurs ont montré qu'avant 5 ans, les enfants ne sont pas en mesure de résoudre de simples problèmes additifs ou soustractifs présentés verbalement. En revanche, la résolution est possible si ces problèmes sont présentés de manière non verbale (Huttenlocher, Jordan et Levine, 1994 ; Jordan, Huttenlocher et Levine, 1992). L'analogie quantité/nombre permise par utilisation des doigts rend possible la manipulation des quantités et permet une première compréhension du calcul. D'après nous, ce n'est pas tant l'utilisation même des doigts que l'information sémantique qu'ils représentent qui joue un rôle. En revanche, l'utilisation des doigts présente l'inconvénient, chez beaucoup d'enfants, de rendre dépendant à leur utilisation et ainsi d'empêcher le recourt à une stratégie de comptage ou de symbolisation plus efficiente et plus rapide. Nous pensons que l'entraînement au *mapping* par l'estimation numérique semble être un bon moyen de fournir de l'information sémantique sans créer de dépendance contextuelle.

3.2.3. Connaître le nom des nombres et leur écriture

Avant de l'utiliser les représentations dans le dénombrement, le calcul ou la résolution de problèmes, une maîtrise de ces codes est indispensable. Savoir lire et écrire les nombres nécessite des connaissances spécifiques et indépendantes liées au système langagier français. Les mots-nombres sont abstraits et présentent des irrégularités (English et Halford, 1995 ; Fayol, 2002 ; Mix, 1999). De ce fait, l'apprentissage des nombres verbaux jusqu'à 10 est lent chez les occidentaux et les orientaux (Miller et Paredes, 1996). De plus, certaines habiletés peuvent être affectées par ces spécificités langagières comme l'empan de chiffres, la résolution de problème sollicitant fortement la mémoire de travail, ... (Ellis 1992). L'acquisition du code verbal est basée au moins au départ sur une représentation quantitative du nombre. Dès deux ans, l'enfant a bien compris qu'à une quantité correspond un mot-nombre. Entre 2 et 4 ans, les enfants sont en mesure de mettre en relation un mot-nombre avec sa représentation ordinale (Benoit, Lehalle, Molina, Tijus et Jouen, 2013) et ce dans les deux directions de traitement (Le Corre et Carey, 2007 ; Wynn, 1990 ; 1992). Toutefois, cet apprentissage se limite principalement aux petits nombres (1 à 3), pour accéder plus tard à des numérosités supérieures (Benoit et al., 2004). Il faut cependant attendre l'âge de 7 ans pour une connaissance verbale ordonnée des nombres jusqu'à 100. Cette connaissance participera à l'élaboration de la quatrième étape du modèle de Von Aster et Shalev (2007) sur le versant oral.

Les premiers nombres arabes écrits apparaissent vers 3 ans mais dépendront largement ensuite de l'enseignement scolaire et d'un apprentissage explicite. La représentation écrite s'appuierait sur le code verbal oral au départ mais s'en distinguerait rapidement pour évoluer de manière indépendante. C'est quand les principes du comptage deviennent explicites vers la fin de la scolarisation en Maternelle que les enfants sont de plus en plus confrontés à l'écrit des nombres. Cela devient ensuite systématique dès le CP.

L'acquisition des nombres arabes dépendrait de la compréhension de la notation positionnelle c'est à dire de saisir que la position donnée à un chiffre correspond à l'unité décimale qui permet de former le nombre. Par exemple, un nombre en deuxième position correspond à 10^1. Si une unité décimale n'est pas utilisée on met un zéro signifiant l'absence de chiffre. Le zéro est considéré lorsqu'il est placé derrière des chiffres, sinon il n'est pas pris en compte. De même, il est nécessaire d'acquérir la conception décimale du nombre afin de réaliser des calculs mentaux plus élaborés nécessitant un passage à la dizaine. L'élève pourra alors composer ou décomposer les nombres ce qui est une stratégie très pertinente de résolution de calcul.

L'analogie entre le nombre oral et le chiffre arabe écrit nécessite un apprentissage particulier car il s'agit de deux symboles arbitraires, ce qui rend leur acquisition plus difficile et plus longue. Les irrégularités langagières des nombres verbaux auraient également des conséquences jusqu'au CE2, ainsi que chez les adolescents en difficulté (Barrouillet et al., 2004 ; Seron et Fayol, 1994).

Les conséquences de ces difficultés liées aux langages seront abordées plus en détail dans la quatrième partie de ce travail.

3.3. La quantification

La quantification est la capacité à chiffrer une quantité et donc à « fournir le cardinal exact ou approximatif d'une collection » (Fayol in Billard et Touzin, 2008 p.22). Pour Fayol (1990), il existe trois types de procédures :

- le subitizing (moins de 5 objets),
- le comptage ou dénombrement exact,
- et l'évaluation approximative globale (au delà de 5 objets).

Selon leur expérience et la situation, les enfants utiliseraient préférentiellement un type de procédure. La quantification est primordiale pour les acquisitions arithmétiques ultérieures (Barrouillet et Camos, 2003).

3.3.1. Le **subitizing**

Le *subitizing* est un processus utilisé par les enfants pour dénommer les petites quantités jusqu'à 4 objets. Si les études révèlent déjà la présence d'un *subitizing* perceptif avec l'existence d'une représentation discrète de petites collections dès l'âge de 4-5 mois (Shipley et Shepperson, 1990 ; Wagner et Walters, 1982), le processus de *subitizing* avec dénomination verbale serait réellement effectif seulement avec l'acquisition des premiers mots-nombres pour désigner précisément les petites quantités de 3 ou 4 objets (Chi et Klahr, 1975 ; Fischer, 1991). Avec des collections plus importantes, le dénombrement ou l'estimation devient incontournable et, même s'il s'agit ici des mêmes stratégies que celles utilisées par l'adulte, les enfants sont beaucoup moins rapides.

Dès 6 ans, les temps de réponse des enfants diminuent pour les quantités inférieures à 4, montrant que les compétences de *subitizing* s'optimisent pour rejoindre les performances d'adultes. Les études n'ont pas vraiment réussi à étudier cette compétence avant l'âge de 5 ans ce qui ne permet pas de trancher quant à l'existence précoce de connaissances proto-numériques.

3.3.2. L'estimation numérique

L'estimation est une quantification rapide et approximative. Il s'agit de la procédure de quantification la plus fréquente notamment car elle est nécessaire très précocement et tout au long de la vie (Siegler et Booth, 2005).

On distingue l'estimation de la numérosité, l'estimation computationnelle et l'estimation sur la ligne numérique. L'estimation de la numérosité est probablement celle qui apparaît la plus tôt au cours du développement. Il s'agit de la traduction d'une représentation quantitative non numérique en nombre dont la précision augmente avec l'âge. L'estimation computationnelle est la traduction d'une représentation numérique à l'autre. Son développement est plus tardif, autour du CE2. L'estimation sur la ligne numérique quant à elle résulte en l'intégration des différentes représentations. Il s'agit de situer la position d'une représentation symbolique sur une ligne numérique analogique.

Il existe peu d'études sur les habiletés d'estimations chez les enfants. De même, peu d'études se sont intéressés aux capacités d'estimation en fonction de l'implication de la modalité orale ou écrite.

On sait que dès 3 ans, les indices visuo-spatiaux qui permettent de répondre dans une tâche de comparaison de quantités sont utilisés même si les enfants continuent de prendre en compte les éléments de densité (Gelman, 1972 ; Siegel, 1974). Chillier (2002) montre que les enfants de 6 à 8 ans sous-estiment (de manière croissante) la numérosité de collections de 8 à 20 points. Même si la variabilité des réponses et les erreurs augmentent avec la quantité à estimer, la précision des estimations augmente avec l'âge (Chillier, 2002 ; Huntley-Fenner, 2001).

Les capacités d'estimation font directement référence à la représentation non-symbolique. C'est d'ailleurs le système numérique approximatif (ANS) qui sous-tend la quantification approximative. Ainsi, le développement des habiletés d'estimation est fonction du développement de la mise en correspondance entre la représentation analogique et les représentations symboliques.

3.3.3. Dénombrement et comptage

Le dénombrement : une coordination de plusieurs compétences

Dénombrer, c'est savoir « combien il y a en tout ». Cette activité nécessite de synchroniser une action verbale (énonciation de la comptine) et une action motrice de pointage visuel ou digital (Beckwith et Restle, 1966 ; Potter et Levy, 1968). La durée du dénombrement augmente avec la taille de la collection à dénombrer. Le dénombrement peut être utilisé par l'enfant dès l'âge de deux ans et permet de poursuivre l'amélioration de l'acuité du système analogique. Les enfants dénombrent, un à un, chaque élément d'une collection et ce de manière bidirectionnelle, réussissant à terme à un quantifier de façon exacte des quantités croissantes. Le dénombrement est une quantification exacte essentielle dans l'acquisition des habiletés numériques (Fuson, 1988 ; Halford, 1993). Il existe même un lien entre une acquisition perturbée du dénombrement et l'existence de difficultés mathématiques à 7 ans (Geary, Bow-Thomas et Yoa, 1992).

Le dénombrement ne peut se développer qu'une fois les premières connaissances numériques symboliques orales consolidées. Les capacités de dénombrement dépendent des possibilités de la chaîne numérique ; les enfants ne peuvent dénombrer que les quantités qui n'excèdent pas sa longueur. Les enfants sont toujours moins rapides et font plus d'erreurs que les adultes à cause d'une automatisation du rappel et d'une intégration des règles de construction des nombres l'oral (Camos, Barrouillet et Fayol, 2001 ; Camos, Fayol et Barrouillet, 1999). L'activité de pointage associée au dénombrement évolue elle aussi avec une utilisation préférentielle du pointage manuel chez les enfants d'âge préscolaire (Gelman et Gallistel, 1978 ; Ginsburg et Russel, 1981) qui cède peu à peu sa place à un pointage visuel chez les adultes, bien que ces derniers continuent ponctuellement de recourir au doigt pour dénombrer (Camos, 2003). Le pointage manuel aurait pour avantage principal de distinguer les objets déjà décomptés de ceux qui restent à dénombrer (Gelman et Galistel, 1978) et d'alléger la mémoire de travail (Alibali et Dirusso, 1999). Le geste de pointage serait bénéfique pour les enfants de 4 ans qui apprennent à compter alors qu'à 6 ans il n'est déjà plus indispensable ; les enfants ayant acquit une expérience suffisante (Saxe et Kaplan, 1981).

La coordination du pointage et de l'énonciation des nombres induit de nombreuses erreurs dans les tâches de dénombrement. Le dénombrement serait une procédure à proprement parler où le pointage et l'énonciation se contraindraient l'une et l'autre (Camos, Barrouillet et Fayol, 2001). Il faut attendre l'âge de 6 ans pour qu'il n'y ait plus de conflit entre les deux composantes du dénombrement et que les enfants soient plus rapides et plus efficace.

Deux courants théoriques différents s'opposent quant à l'émergence du dénombrement : la théorie des « principes en premier » et la théorie des « principes après ». La théorie des « principes en premier » considère que les principes de comptage sont présents précocement et, avec l'utilisation répétée de ces principes, l'activité de dénombrement s'améliore (Gelman et Gallistel, 1978 ; Gelman et Meck, 1983). La théorie des « principes après » postule que la répétition des procédures de dénombrement par répétition permet l'acquisition progressive de ses principes (Briars et Siegler, 1984 ; Fuson, 1988 ; Secada, Fuson et Hall, 1983). Ces deux courants théoriques guident notamment la mise en place de programme d'apprentissage ou de remédiation en mathématiques dont nous parlerons dans deuxième partie de la thèse. Malgré leur opposition théorique, ces deux courants considèrent qu'il existe des habiletés de quantification précoce.

Développement du dénombrement

Cinq principes définissent les règles liées au comptage (Gelman et Gallistel, 1983):

- chaque élément compté a une étiquette verbale et une seule,
- le dernier mot-nombre prononcé désigne le cardinal,
- il n'y a pas d'influence de l'endroit où démarre le dénombrement,
- l'ordre de comptage est indifférent,
- et la nature des éléments comptés n'a pas d'influence sur le cardinal.

Pour Gelman, l'aptitude à compter est naturelle et universelle. Elle considère que les principes sont précoces et guident l'acquisition du comptage verbal (théorie des « principes en premier »). Les enfants d'âge préscolaire recourent d'ailleurs spontanément au comptage. Pour Fuson (1988) ou encore Siegler et Shipley (1987) les principes seraient acquis au cours des apprentissages et de l'acquisition des procédures de comptage (théorie des « principes-après). Plus précisément, Fuson considère que les principes s'acquièrent par imitation socio-culturelle. Au final, il est bien établi que les principes sont nécessaires pour accéder au dénombrement mais il semble qu'il faille attendre l'âge de 4 ans au moins pour qu'ils soient maitrisés. Ainsi, les études sont plutôt en faveur de la théorie des « principes-après ».

Au fur et à mesure du développement, les individus développent des stratégies qui améliorent la vitesse de dénombrement. Par exemple, on trouve le dénombrement classique (chaîne verbale), le dénombrement par n (par 2, par 4 ou plus), une stratégie d'addition (repérage d'une somme de quantité), une stratégie de multiplication et l'estimation. Camos (2003) a étudié l'utilisation de ces stratégies de 7 à 20 ans. La stratégie classique (par la chaîne verbale) est utilisée préférentiellement par les plus jeunes enfants et délaissée peu à peu avec l'avancée en âge. Dès 7 ans, les enfants peuvent utiliser la stratégie de dénombrement par *n* ou d'addition tandis que la stratégie multiplicative commence vers 9 ans. Les stratégies se développent donc avec l'âge mais la stratégie de dénombrement par n devient la stratégie privilégiée chez les sujets plus âgés.

Avant l'acquisition du comptage verbal et le développement des capacités de la mémoire de travail, l'enfant préscolaire aura tendance à tout compter. Cette stratégie, où l'élève dénombre tout depuis le début (en partant de 1 et en s'aidant parfois de ses doigts), est progressivement remplacée par un surcomptage où l'élève compte à partir du plus grand terme. Néanmoins, cette stratégie ne doit pas perdurer et sera remplacée elle aussi par des stratégies de comptage plus élaborées (passage à la dizaine, groupement, dégroupement...) ou par des connaissances arithmétiques automatisées comme les faits numériques.

3.4. Apprentissages plus complexes

Notre objectif n'est pas d'étudier les capacités de dénombrement, de calcul ou d'activités mathématiques plus complexes. Nous nous intéressons plutôt à la manière dont, en amont, les représentations s'acquièrent et s'imbriquent pour ensuite pouvoir être sollicitées dans les activités numériques. Même si nous ne développons pas dans notre propos les apprentissages plus complexes, nous allons rapidement évoquer ce qu'il en est de leur développement chez les enfants.

Par le comptage, les enfants sont en mesure dès 5 ans de résoudre des problèmes d'ajouts ou de retraits de quantités (Siegler et Jenkins, 1989). Ils utilisent alors majoritairement le comptage sur les doigts ou le comptage verbal (Siegler et Shrager, 1984). Mais, il semblerait que déjà à l'âge de trois ans les enfants peuvent utiliser des objets pour résoudre des additions simples (Fuson, 1982) après constitution des deux opérandes et dénombrement de l'ensemble.

En ce qui concerne les soustractions, leur résolution est possible dès 4 ans à l'aide de manipulations. La multiplication et la division en revanche, ne se développent pas spontanément avant l'enseignement formel.

L'expérience mathématique de l'enfant est déjà bien entamée lorsqu'il fait son entrée à l'école primaire. Il possède déjà, dans son répertoire de résolution, plusieurs stratégies pour l'addition et la soustraction.

Les premières multiplications sont apprises par apprentissage par coeur (Geary, 1994). Il existe chez les jeunes enfants une représentation naïve des fractions (Gallistel et Gelmann, 1992 ; Mix et al., 1999). Les premières expériences des enfants dans ce domaine sont permises par les situations de partage. Il faudrait multiplier les représentations concrètes des fractions pour permettre aux enfants de construire le concept (Streefland, 1997).

L'expertise INSERM (2007) indique que les difficultés et les erreurs présentées pour les fractions chez les élèves sont « probablement dues à des représentations et des conceptions erronées qui font ensuite obstacle à la suite de l'apprentissage » (Inserm, 2007 ; p121). Les difficultés peuvent s'expliquer par le fait que les fractions ne sont pas considérées comme des nombres mais comme la partie d'un tout et que les élèves se les représentent comme des objets, qui sont donc par essence, impossible à fractionner.

De la petite enfance jusqu'à l'âge scolaire, les différentes représentations se développent à travers leurs acquisitions et leurs implications dans les activités mathématiques. Au départ indépendantes, elles s'intègrent et se combinent pour la plupart des tâches arithmétiques. Ainsi, pour dénombrer, on peut solliciter la représentation orale et écrite. Pour comparer deux nombres, on peut solliciter la représentation symbolique et la représentation analogique. C'est l'ensemble de ces connexions, réalisées tout au long des apprentissages qui permet d'élaborer la Ligne Numérique Mentale. D'abord essentiellement analogique, elle s'enrichit ensuite des codes symboliques pour leur conférer du sens.

3.5. Evolution de la représentation sur la ligne numérique mentale

Avant même que la chaîne numérique verbale ne soit développée, l'évaluation de collections linéaires sur une échelle analogique externe est possible dès l'âge de 3 ans et demi (Cuneo, 1982) et pour les numérosités jusqu'à 7. Toutefois, pour les numérosités supérieures, les aspects de longueur et densité ne sont distingués jusqu'à l'âge de 7 ans. On observerait dès 5 ans, des correspondances directes entre les systèmes de représentations symboliques et la LNM (De Hevia et Spelke, 2009 ; Donlan, Bishop et Hitch, 1998), l'élaboration de la LNM débuterait donc vers cet âge-là et rendrait possible les tâches d'estimation sur la LNM.

La ligne numérique mentale se développe principalement durant l'école élémentaire, permettant ainsi des estimations plus précises et avec moins d'erreurs (Siegler & Booth 2005). Toutefois, cette amélioration est vraie surtout pour les nombres compris entre 0 et 100 que 0 à 1000 par exemple (Siegler & Opfer, 2003) car ils sont plus fréquents et sollicités durant la scolarité.

L'effet de distance est présent dès 5 ans dans une tâche de comparaison de chiffres arabes (Donlan, Bishop et Hitch, 1998 ; Duncan et Mcfarland, 1980). Avec l'âge, l'effet de distance devient moins robuste et les temps de réponses sont moins influencés par cet effet (Sekuler et Mierkiewicz, 1977). La représentation sur la LNM serait plus comprimée chez les enfants jusqu'à 10 ans et avec plus de variabilité entre les numérosités. Pour Huntley-Fenner (2001), les représentations se chevauchent de moins en moins avec l'âge puisque de 5 à 7 ans la variabilité des réponses diminue. L'auteur explique que ce phénomène est lié à la maîtrise de la chaîne numérique verbale et du comptage. La représentation de la LNM serait donc similaire à celle des adultes mais elle évoluerait en nuance et en précision avec l’âge. Toutefois, tous les auteurs ne s’accordent pas quant à une représentation linéaire des numérosités. D’autres recherches ont visé à mettre en avant l’aspect compressible de la ligne numérique chez les enfants d’âge scolaire (Todd, Barber et Jones, 1997). Une série d’expérience menée par Chillier (1999) montre que la ligne serait effectivement compressible chez les enfants de 6 à 9 ans, avec une diminution de la discriminabilité des nombres en raison de la diminution du chevauchement entre les numérosités. L’effet SNARC a été observé en situation de jugement de parité chez les élèves scolarisés en équivalent du CE2 (Berch, Foley, Hill et Ryan, 1999), probablement au moment où les différentes représentations du nombre sont suffisamment maitrisées voire automatisées (Girelli, Lucangeli et Butterworth, 2000).

Des évolutions ultérieures sur la LNM concernent les nombres décimaux, les nombres relatifs, les nombres réels ... L’ensemble de ces changements conceptuels est important car il s’accompagne d’une intégration des propriétés logiques des nombres dans la LNM. De plus, l’affinement et la précision des représentations sur cette ligne permettent d’améliorer la fluidité et l’aisance arithmétique. Bien que fondamentales, ces évolutions dépassent notre propos et ne seront pas traitées ici.

Conclusion

L’étude des acquisitions numériques est un vaste champ d’investigation, complexe par son imbrication avec le langage et par son développement rapide dès la naissance. Plusieurs études s’y sont intéressées, et ce même chez les animaux afin de mieux comprendre comment ces compétences se développent et dans quelles conditions. Nous venons de voir dans la première partie, que le système analogique approximatif est essentiel dans les acquisitions et le développement des habiletés numériques. Nous avons également développé les modèles majeurs de la construction du nombre et du calcul. Ces modèles mettent en lien les différentes représentations sans toutefois considérer leurs relations et leurs évolutions au cours du développement. Ensuite, nous avons explicité rapidement l’évolution des acquisitions numériques au cours du développement. Les différentes activités mathématiques impliquent l’ensemble des représentations numériques à des degrés divers. Cela justifie de considérer l’acquisition des codes les uns par rapport aux autres ainsi que leurs interactions au cours du développement afin de mieux comprendre comment les enfants acquièrent les représentations numériques.

L’enfant de 5 ans est en mesure de mettre en correspondance les systèmes de représentations numériques avec une ligne numérique mentale. Cette capacité s’améliore avec l’âge et la scolarisation. Une manière pertinente de mettre en correspondance l’ensemble de ces systèmes et de donner du sens aux nombres et au calcul est de solliciter les activités d’estimation sur la ligne numérique mentale. Nous considérons ainsi que l’estimation sur la LNM est un moyen de redonner du sens aux apprentissages.

En dépit des liens importants qui existent entre la représentation analogique, les capacités d’estimation sur la LNM et les habiletés mathématiques exactes et symboliques, nous verrons dans la seconde partie de ce travail qu’aucun programme pédagogique n’a véritablement recourt à l’estimation. A partir de là, nous avons réalisé dans ce travail une première tentative d’injection d’activités d’estimation en classe de Cours Préparatoire afin d’améliorer l’acuité du sens des nombres et du calcul et la compréhension des symboles arithmétiques.

De même, nous observerons dans la troisième partie, que les programmes de remédiation des troubles du calcul chez des enfants porteurs de la trisomie 21 sollicitent principalement le calcul exact et symbolique alors que le langage fait défaut. Ainsi, nous proposerons une remédiation basée davantage sur le traitement visuo-spatial et analogique du nombre et sur le calcul approximatif avec les activités d’estimation.

Enfin, nous parlerons du transcodage et de la mise en correspondance entre les représentations, avec toujours l’objectif de mieux préciser les relations entre les codes. Nous tenterons d'apporter des connaissances relatives aux capacités d'estimation sur la ligne numérique mentale selon la représentation symbolique impliquée (distinguer mot-nombre et chiffre arabe) ainsi que sur l'évolution des représentations les unes par rapports aux autres durant la scolarisation primaire.

L'ensemble de ces études doit permettre de mieux cerner le rôle de la représentation analogique et l'intérêt de l'estimation dans les apprentissages mathématiques.

DEUXIEME PARTIE

Rôle et implications de l’estimation numérique dans le développement des compétences mathématiques au Cours Préparatoire chez l’enfant typique

L’enseignement des mathématiques est primordial pour apprendre non seulement à dénombrer mais aussi et surtout pour développer le raisonnement et le calcul arithmétique qui conditionnent la réussite scolaire et professionnelle. Les enseignants qui assurent cet enseignement doivent disposer de solides connaissances sur la manière dont les enfants développent leurs compétences numériques.

Hunting et Mousley (2009) ont interviewé des professionnels intervenant auprès d’enfants d’âge préscolaire pour recueillir leur avis sur le moment où les enfants commencent à apprendre les mathématiques. Les réponses indiquent que 88% des répondants jugent que les enfants sont capables de penser mathématiquement dès 3 ans, et dès 2 ans pour 70% d’entre eux. Il y aurait ainsi une réelle conscience, chez les professionnels, des capacités numériques précoces des enfants. Toutefois, ce positionnement serait surtout basé sur leurs expériences propres plutôt que sur une appropriation des données d’études menées dans ce domaine. Un travail systématique reste à fournir afin que les résultats de celles-ci soient intégrés dans la pédagogie et la prise en charge éducative des enfants.

Un exemple de données empiriques non prises en compte dans les programmes pédagogiques est le rôle de la représentation analogique et de la mise en correspondance entre les représentations. Ces aspects, pourtant décrits comme essentiels pour les apprentissages arithmétiques ne sont que très peu sollicités par les enseignants. Nous défendons les activités d’estimation sur la LNM comme un moyen pertinent de solliciter ces correspondances dès le début du Cours Préparatoire afin d’améliorer les compétences en mathématiques. Après avoir réalisé un exposé succinct des programmes pédagogiques et de leurs résultats, nous expliciterons les programmes d’apprentissages et de remédiations alternatifs existants. Nous présenterons ensuite notre étude expérimentale menée sur une classe de Cours Préparatoire.

Chapitre 4

L’enseignement des mathématiques au CP : fonctionnement, résultats et constats

1. Les programmes officiels et les contenus pédagogiques

Un socle commun de connaissances et de compétences présente les compétences à connaître et maîtriser au terme de la scolarité obligatoire. Instauré en 2005, il contient actuellement sept compétences essentielles : la maîtrise de la langue française, la pratique d’une langue vivante étrangère, les principaux éléments en mathématiques et culture scientifique et technologique, la maîtrise des techniques d’information et de communication, la culture humaniste, les compétences civiques et sociales ainsi que les capacités d’autonomie et d’initiative. La loi d’orientation et de programmation pour la refondation de l’Ecole de la République prévoit une mise à jour de ce dispositif désormais intitulé « Socle commun de connaissances, de compétences et de culture ».
A cet outil de référence pour les enseignants s’ajoute les instructions officielles de 2008 définissant les programmes scolaires. Ces objectifs d’enseignement doivent être atteints et donc intégrés à la progression suivie par l’enseignant. La manière dont ces objectifs sont atteints est laissée à la liberté pédagogique de l’enseignant qui peut recourir à des manuels ou des cahiers pédagogiques. Une réflexion est également conduite sur le contenu des instructions officielles au regard de la loi de refondation de l’Ecole et de la réforme des rythmes scolaires instaurée depuis 2014.

1.1. Les instructions officielles de 2008

Dans les années 1970 et suite aux travaux de Piaget sur le développement cognitif, les programmes avaient comme objectif principal l’appropriation des principes de la logique et de l’abstraction logico-mathématique par les élèves (à partir essentiellement des activités de sériation et de classification). On se situe alors en plein essor du constructivisme qui repose sur la nécessité d’une construction des savoirs par les élèves de manière active et non plus passive, comme cela pouvait être le cas auparavant.

Plusieurs programmes se sont ainsi succédés jusqu’aux instructions officielles de 2008, qui conservent l’idée d’une construction active des connaissances mais où l’accent est mis sur le rôle de la mémoire et de l’automatisme dans l’acquisitions des savoirs numériques.

Le programme officiel prévoit un total de 180 heures de mathématiques sur l'année, soit 1 heure 15 minutes par jour. C'est le deuxième plus gros volume d'enseignement au cycle 2 après le français, qui comptabilise 360 heures sur l'année.

Les objectifs prioritaires du CP et du CE1 sont la connaissance des nombres et le calcul. On insiste également sur la résolution de problèmes – afin de construire le sens des opérations - et sur une pratique régulière du calcul mental.

Les programmes sont divisés en quatre grands domaines :

- Nombres et calcul : dénombrer les collections, connaître la suite des nombres et les nombres décimaux, mémoriser les tables d'additions, de soustractions et de multiplications et utiliser les techniques opératoires ainsi que résoudre des problèmes.
- Géométrie : acquérir des connaissances en orientation et repérage, connaître les figures planes et les solides et utilisation des instruments géométriques.
- Grandeurs et mesures : apprendre et comparer les unités usuelles de longueur, de masse, de contenance, de temps, de monnaie et résoudre des problèmes sur ces mesures.
- Organisation et gestion des données : utilisation des tableaux et graphiques.

Chaque enseignant dispose de ces objectifs généraux et d'une liste de compétences plus précises à acquérir pour organiser librement le contenu de leur enseignement. C'est la liberté pédagogique. Il est attendu que les élèves de CP soient en mesure :

- de connaître et utiliser les nombres entiers jusqu'à 100
- de maîtriser les décompositions additives jusqu'à 20
- de comparer, ranger et encadrer les nombres
- d'écrire une suite croissante ou décroissante des nombres
- connaître les doubles inférieurs à 10 et les moitiés des nombres inférieurs à 20
- connaître la table de multiplication par 2
- calculer mentalement ou en ligne des sommes et des différences
- maîtriser la technique opératoire de l'addition, débuter celle de la soustraction
- résoudre des problèmes simples à une opération

Ce sont ces instructions officielles que l'enseignant est tenu de suivre pour construire son programme de classe. D'autres outils sont à sa disposition comme les cahiers pédagogiques qui proposent des progressions annuelles répondant aux différents objectifs du programme officiel. D'autres manuels fournissent également des exemples d'activité de classe.

1.2. Les cahiers pédagogiques

1.2.1. Le nombre au Cycle 2

Le nombre au cycle 2 (2010) est un guide didactique et pédagogique à destination des enseignants qui apporte un éclairage sur les compétences mathématiques à acquérir. Sous l'égide du Ministère de l'Education Nationale, il permet également d'apporter des pistes sur la mise en œuvre en classe.

Différents auteurs y ont rédigé des textes à visée réflexive ou pratique issus de la recherche et de l'expérience. On y insiste, tout comme dans le programme officiel, sur la résolution de problèmes et la notion de classes de problèmes, ainsi que sur la construction des automatismes (« raisonnements construits et progressivement intériorisés », *p.4*). Il est préconisé de réaliser des exercices selon un entraînement systématique et progressif.

Dans les points fondamentaux, on retrouve la pratique du calcul mental, avec des activités de pure mémorisation de nombres, de traitements de données, de transformations. Préconisées durant 10 à 15 minutes tous les jours, ces activités mobiliseront les tables d'additions, la recherche de compléments ou l'application de procédures spécifiques à notre système numérique. Au niveau de la numération, on insiste sur les situations d'échange, le groupement, l'algorithme des nombres et la lecture et l'écriture des nombres. Un accent est également mis sur les différentes représentations des nombres et leur mise en relation (essentiellement au niveau des codages symboliques et exacts).

Les trois manuels les plus utilisés par les enseignants du CP pour mettre en œuvre une progression des apprentissages mathématiques sont « Cap Math », « Picbille » et « Ermel ». Nous les décrivons ci-après brièvement en cernant la place des activités d'estimation envisagées dans ces cahiers pédagogiques.

1.2.2. « Cap Math » (Charnay, Dussuc et Madier, édition 2009)

Cette méthode propose 15 unités de travail avec, à chaque fois, 7 séances d'apprentissage, une séance bilan et des activités complémentaires. Il est très largement utilisé dans les écoles primaires.

Le principe de base de cette méthode est d'allier activités de recherche en résolution de problèmes et activités d'entraînement. Les concepteurs de « Cap Math » considèrent que les principaux éléments en mathématiques se construisent et s’entraînent par la résolution de problème du quotidien.

Le contenu est structuré sur 180 heures d’enseignement par an, soit 1 heure 30 d’activité par jour répartie en une séance de 30 minutes de calcul mental/révisions et une autre non consécutive de 45 minutes pour les nouveaux apprentissages. Une quarantaine d’heures est laissée à disposition pour les évaluations ou la réalisation d’activités supplémentaires.

La démarche pédagogique comprend toujours une phase d’apprentissage (sous forme de situations-problèmes), une phase de synthèse (pour identifier ce qui est important) et une phase d’entraînement (pour maintenir et mémoriser les connaissances). La méthode privilégie la résolution de problème, le calcul mental ainsi qu’un travail sur la compréhension.

« Cap Math » comprend un guide de l’enseignant, un livre avec le matériel à photocopier, un fichier d’entraînement et un Dico-Math. Le guide de l’enseignant contient toutes les activités détaillées pour chaque séance. Le fichier d’entraînement est un support de travail pour l’élève (Figure 4). Il contient la trace des activités réalisées durant les séances. Le dico-Math est un dictionnaire de référence sur les termes ou les méthodes utilisées en mathématiques (par ex. la valeur des chiffres, la comparaison des nombres, ..).

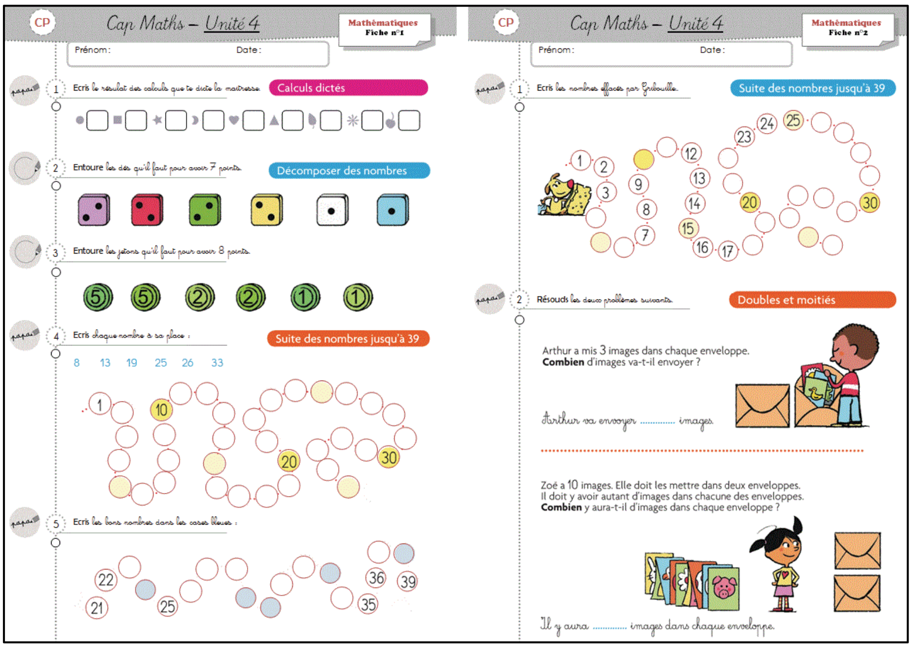


Figure 4. Exemple de fiche d’activité à destination des élèves (« Cap Math » CP, 2009)

Les activités d’estimation tiennent une place minime dans la progression « Cap Math ». En effet, on les retrouve par exemple de manière sommaire dans les premières unités d’apprentissage où il s’agit de mettre en relation une quantité avec un nombre (reconnaissance rapide et comparaison de quantités). L'estimation est ensuite principalement mobilisée dans la partie Grandeurs et Mesures pour comparer des longueurs ou des masses. Aucun travail n'est réalisé sur la mise en correspondance entre les représentations symboliques et non-symboliques ou sur la sémantique des nombres. Ainsi, dans « Cap Math », il n'y a que peu d'activités d'estimation, les activités ne portant que sur les quantités sans mise en lien avec les symboles.

1.2.3. « Picbille » (Brissiaud, Clerc, Lelièvre, Ouzoulias et Suire, 2013)

J'apprends les maths avec « Picbille » est un ouvrage pédagogique pour l'enseignement des mathématiques en classe de CP. Il s'agit d'une méthode, conçue par Rémi Brissiaud, dont l'utilisation est relativement répandue dans les classes du CP. Un des objectifs de « Picbille » est de solliciter fortement le calcul mental afin d'éviter le surcomptage.

Cette méthode est très axée sur la notion de dizaine afin d'acquérir une conscience décimale des nombres et d'aborder l'abstraction du calcul mental. Le principe est qu'on peut ranger des billes dans une boîte, 10 billes par boîte c'est à dire 10 unités (Boîte de Picbille, Figure 5). Quand une boîte est pleine on peut la fermer et on obtient ainsi une dizaine.

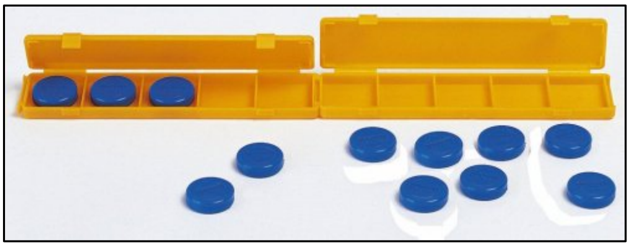


Figure 5. Boîte de Picbille

Dans la dernière édition (2013), on évolue très progressivement dans la taille des nombres pour que chaque élève accède à la décomposition. Les auteurs ont également ajouté un repère dans la boîte de Picbille à 3 unités pour aider à concevoir le nombre 5 et donc favoriser la composition/décomposition.

On dispose également d'un livret pédagogique pour l'enseignant et d'un fichier à destination des élèves qui contient les fiches propres à chaque activité (Figure 6).

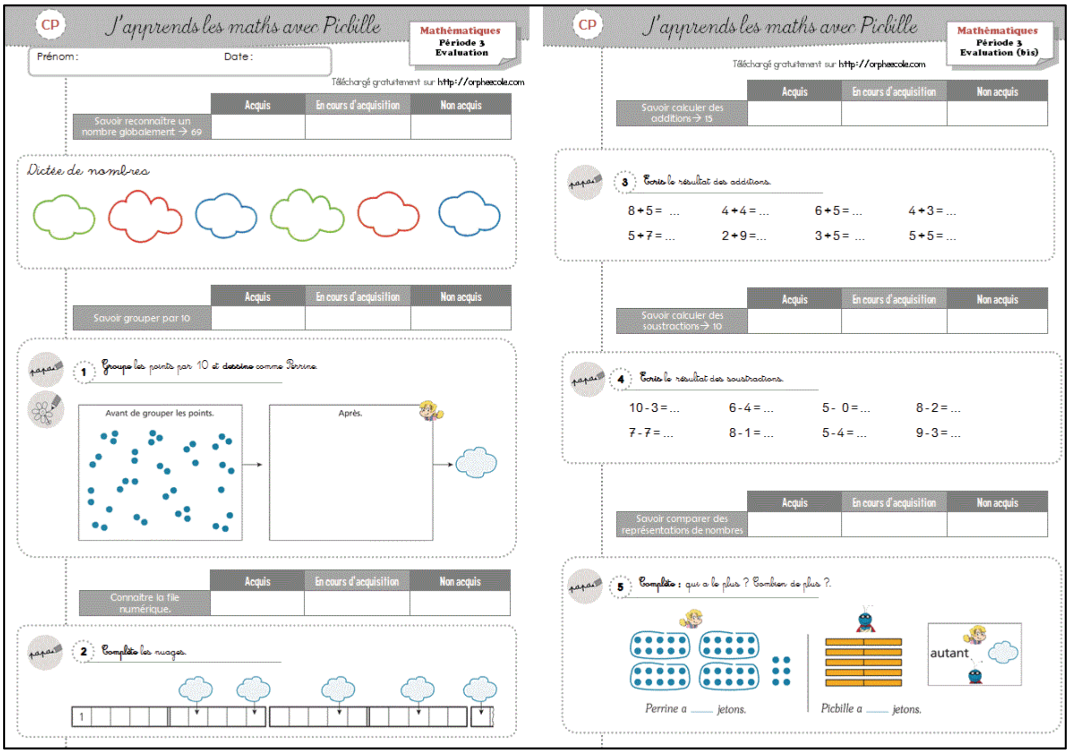


Figure 6. Exemple de fiche d'activité pour l'élève (« Picbille », 2012)

« Picbille » sollicite davantage la multi-représentations des nombres (doigts, dés, boîte de Picbille et nombre arabe) et cherche à établir des liens entre ces représentations. Toutefois, on reste dans du calcul exact, sans aucune activité d'estimation visant à développer et préciser le sens des nombres et du calcul dans tous les types de représentations.

1.2.4. « Ermel » (Guillaume, Colomb, Charnay, Douaire et Valentin, 2005)

L'ouvrage « Ermel » *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* est issu des travaux menés par l'INRP (Institut National de Recherche Pédagogique), aujourd'hui appelé Ifé (Institut Français de l'Education). On y trouve des propositions d'enseignement qui ont toutes été expérimentées. Ses fondements sont la prise en compte des compétences initiales des enfants, l'appropriation progressive des notions à travers la résolution de problèmes et le réinvestissement réguliers des connaissances acquises.

Les activités sont détaillées selon les cinq périodes et par quinzaine en fonction de quatre types d'exercices : les nombres pour mémoriser, les nombres pour anticiper et calculer, connaître les nombres et des problèmes pour apprendre à chercher.

Outre le manuel, l’enseignant dispose d’un guide d’utilisation qui fournit les indications pertinentes pour la mise en oeuvre en classe. Il existe également un cahier de l’élève comme support d’activités (Figure 7). On y trouve les énoncés des problèmes, les exercices écrits d’entraînement, les exercices de réinvestissement et d’évaluation ainsi que des fiches de jeux.

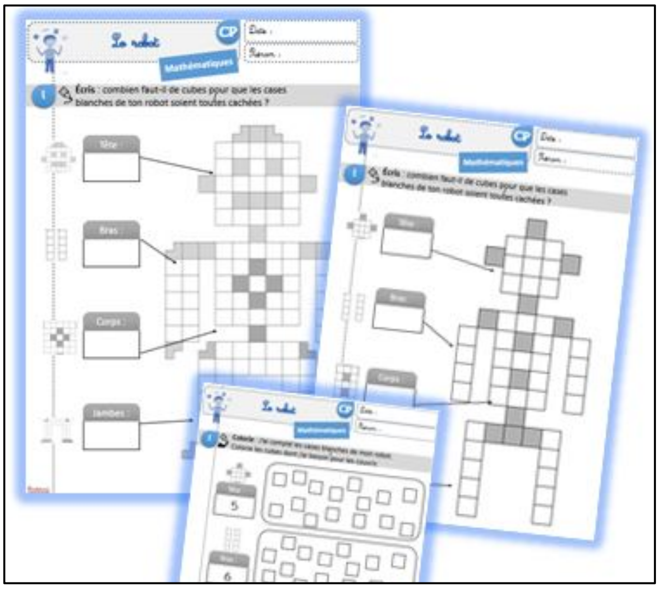


Figure 7. Exemple de fiches d’activité du cahier de l’élève (« Ermel » CP).

Les notions de cardinalité et d’ordinalité sont très présentes dans « Ermel ». Elles permettent de réfléchir quant aux comparaisons de nombres ou de quantités ou permettent de faire référence à la position des nombres les uns par rapport aux autres. Toutefois, on ne considère pas réellement l’activité d’estimation. Lorsque la référence est faite à l’estimation c’est souvent pour situer la position des nombres ou des résultats d’une opération sur une ligne numérique graduée (souvent d’unité en unité). La signalisation de cette graduation n’incite pas, bien au contraire, à l’estimation (ce qui n’enlève rien à son intérêt par ailleurs) Par exemple, pour évaluer une quantité, l’activité d’estimation n’est pas sollicitée alors que celles du *subitizing* ou de dénombrement le sont sur une ligne graduée.

1.2.5. Conclusions sur les cahiers pédagogiques

A la fois rassurants et structurés, les cahiers pédagogiques sont une réelle référence pour les enseignants, notamment dans la discipline des mathématiques qui est une matière nettement moins investie que le français. Toutefois, il n’est toujours pas pris en compte dans ces cahiers, même dans les plus réactualisés, l’apport de l’estimation numérique et de la mise en correspondance entre représentation. Le code analogique n'est sollicité qu'en début d'année dans les activités impliquant des collections d'objets et le calcul approximatif n'est presque jamais exercé si ce n'est pour mesurer des longueurs ou sous-peser des masses.

2. Résultats des enquêtes (IVQ et PISA)

La chute des performances scolaires n'est pas surprenante, notamment au niveau des compétences en mathématiques. Les changements qui ont eu lieu depuis plusieurs décennies sur les objectifs et les exigences scolaires, la structuration des temps de classe (baisse du volume horaire), le poids pris par la lecture et l'écriture dans les apprentissages et le développement des nouvelles technologies (qui freine la pratique du calcul, notamment avec la calculatrice) ou encore le rôle que prennent les parents dans l'acquisition des connaissances scolaires de leurs enfants... sont quelques explications possibles à cette baisse de niveau. De nos jours, il est moins acceptable dans la société de ne pas savoir lire et écrire que de ne pas savoir compter. C'est l'ensemble de ces difficultés qui amènent aujourd'hui à se centrer davantage sur les difficultés d'apprentissage des mathématiques.

Depuis plusieurs décennies, des comparaisons nationales ou internationales sur les compétences académiques se sont mises en place. Les résultats montrent que le niveau de performance continue de baisser en France et que les inquiétudes grandissent.

L'enquête Information et Vie Quotidienne (IVQ, INSEE, 2011) a pour objectif de mesurer le niveau de compétences acquis par les adultes à l'oral, l'écrit et en calcul. Une première enquête a été conduite en 2004, ce qui permet à l'INSEE d'observer l'évolution de ces compétences. Cette enquête a été réalisée auprès de 14000 personnes de 16 à 65 ans résidants en France. 16% des interrogés ont des performances médiocres à moyenne en calcul (moins de 60% de réussite). Ces difficultés sont plus fréquemment rencontrées chez les femmes que chez les hommes et chez les personnes de plus de 40 ans. On observe également un lien avec le pays de scolarisation en défaveur des personnes scolarisés hors de France dans une autre langue que le français. Autre constat inquiétant : les performances se dégradent en calcul par rapport à 2004, avec une baisse (-2%) des personnes « très à l'aise » de 2004 à 2011 (Jonas, décembre 2012). Les arguments avancés pour expliquer ce résultat sont liés au vieillissement de la population et aux outils pédagogiques utilisés de nos jours (calculatrice et ordinateur notamment).

En 2013, le nouveau rapport PISA (Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves) a relevé des résultats aussi inquiétants au niveau des performances mathématiques. Ce programme évalue les performances des élèves de 15 ans issus des pays de l'OCDE. L'évaluation de 2012 comprenait les mathématiques comme discipline majeure. Ils étaient 510 000 élèves à passer les épreuves papier-crayon d'une durée de deux heures. Certains pays ont réalisé des épreuves supplémentaires de mathématiques, de compréhension de l'écrit et de résolution de problèmes. A cela s'ajoutent différents questionnaires sur les habitudes de vie, les expériences scolaires, l'environnement d'apprentissage…

Les performances en mathématiques des élèves de 15 ans en France (495 points) sont au niveau des pays de l'OCDE (494 points). Toutefois, le score obtenu par ces élèves a diminué de 16 points comparativement au rapport PISA de 2003. A cette époque, la France avait des performances supérieures à la moyenne de l'OCDE. Le pourcentage d'élèves très performants n'a pas changé depuis 2003 (13%) mais il y a nettement plus d'élèves en difficultés (22%). Selon les critères PISA, ces élèves très en difficultés n'auraient pas atteint le niveau leur permettant « de poursuivre des études et de participer de manière efficace et productive à la vie de la société » (p.4). Ces résultats indiquent que le système éducatif s'est dégradé depuis 10 ans. En France, les élèves éprouveraient davantage de plaisir que la moyenne des pays de l'OCDE en mathématiques mais seraient par contre nettement plus anxieux, tout comme cela était le cas en 2003. Cette anxiété est plus marquée chez les filles. Les garçons devancent toujours les filles en mathématiques (+9 points). Toutefois, la baisse de performances en mathématiques depuis 2003 concerne autant les filles que les garçons.

Une forte corrélation est observée entre le milieu socio-économique et les performances mathématiques dans le rapport PISA. En effet, la corrélation est bien plus forte en France que pour les autres pays, c'est ici que les écarts sont les plus grands. L'augmentation d'une unité dans l'évaluation du statut économique et social entraîne une hausse de 57 points en mathématiques en France contre 39 points en moyenne dans l'OCDE.

En détaillant les résultats, il apparaît que les élèves français de 15 ans ont surtout des difficultés dans la compétence à « formuler des situations de manière mathématiques ». En revanche, leurs performances se situent dans la moyenne pour « interpréter les résultats » et « employer les concepts, procédures et raisonnement mathématiques ». Ce processus de formulation serait toutefois une difficulté pour la plupart des élèves de cet âge là, quel que soit le pays.

Alors, que penser des programmes scolaires enseignés aux élèves ? Donne-t-on vraiment toutes leurs chances à tous les élèves de réussir les apprentissages mathématiques ? Que fait-on des élèves les plus en difficultés, ceux n’ayant pas atteint un niveau suffisant pour la poursuite d’études supérieures? Quelques programmes de remédiations existent et s’utilisent à l’Ecole Primaire.

3. Apprentissages et remédiation en mathématiques à l’Ecole Primaire

On sait que le niveau de départ des élèves en mathématiques a d’importantes conséquences. En effet, il semblerait qu’il existe un plus grand risque de rester faible en mathématiques si le niveau d’un élève qui commence le CP est inférieur dans les compétences numériques de base (Duncan, Dowsett, Claessens, Magnuson, Huston et al., 2007). Ainsi, le niveau des élèves au début de l’enseignement primaire est prédictif de la réussite ultérieure.

Les manques et les difficultés dans l’enseignement des mathématiques ne sont pas nouveaux. Les études en psychologie et en neuropsychologie ont abouti à la création de quelques démarches pédagogiques ou de programmes de remédiation en mathématiques pour les enfants d’âge scolaire. Toutefois, nous verrons que ces démarches sont rarement utilisées dans un cadre pédagogique mais commencent à être exploitées dans un cadre rééducatif. Elles sont alors parfois difficiles à adapter au contexte de classe. De plus, les enseignants n’ont pas toujours accès à ces travaux et ne peuvent donc pas les mettre en pratique.

On peut classer ces programmes selon trois types : l’entraînement aux procédures, l’entraînement aux concepts et l’entraînement aux représentations non-symboliques (Thevenot et Masson, 2013). Ces trois catégories de programme renvoient à des fondements théoriques différents mais leur objectif est toujours de faire apprendre différemment les mathématiques aux élèves.

L’entraînement aux concepts et aux procédures sont issus de la théorie des « principes en premier» et des « principes après» que nous avons évoqués dans la première partie. Les auteurs, qui considèrent que l’enseignement doit avant tout privilégier les concepts, estiment que ce sont les connaissances conceptuelles qui permettent l’acquisition de procédures (Briars et Siegler, 1984). Pour ceux qui envisagent plutôt un enseignement basé sur les procédures avant les concepts, c’est l’application régulière de procédures qui rend possible l’extraction de régularités et de concepts en mathématiques (Briars et Siegler, 1984 ; Fuson, 1988).

Enfin, de plus en plus de chercheurs considèrent actuellement que l’acquisition des connaissances mathématiques doit passer par la l’intégration et la coordination des représentations analogiques avec les représentations symboliques conventionnelles.

3.1. L’entraînement aux procédures et aux concepts

3.1.1. L’entraînement aux procédures

Les procédures désignent l’ensemble des actions à mener pour atteindre un but. Dans le champ des mathématiques, il s’agit d’un concept central, puisque les tâches arithmétiques possèdent toutes une procédure spécifique qui permet, une fois intériorisée de gagner un temps considérable pour la résolution. C’est une manière optimale de procéder avec un moindre coût cognitif. La connaissance et l’application de procédures mathématiques correctes sont des enjeux importants pour les enseignants. Par exemple, ils feront apprendre par coeur certains calculs comme les tables d’addition ou de multiplication.

Un moyen d’entraîner aux procédures est la répétition (Ashcraft, 1992 ; Thorndike, 1921) qui permet, après plusieurs présentations, d’intérioriser la réponse et de la connaître immédiatement. Thorndike (1921) préconisait 12 répétitions dans la semaine, 24 répétitions dans les deux mois suivants puis 30 répétitions réparties par la suite pour établir une connaissance solide d’un calcul simple. La quantité de répétition est modulée en fonction des compétences de chaque enfant. Il n’y a pas eu d’autres travaux sur la quantité de répétitions nécessaires pour intégrer les savoirs.

La répétition fréquente de certaines situations mathématiques permet d’améliorer significativement la vitesse de résolution et son exactitude (Thevenot et Castel, 2012). Il s’agit donc d’une méthode d’apprentissage efficace. Toutefois, le poids des connaissances procédurales est aujourd’hui plutôt remis en question, puisqu’il semblerait que même les adultes (supposés experts) ont recourt à des calculs rapides, alors qu’ils disposent de procédures intériorisées (Barrouillet et Thevenot, 2013 ; Fayol et Thevenot, 2013).

3.1.2. L’entraînement aux concepts

Pour les auteurs concernés par ce type d’entraînement, les concepts précèderaient la construction des procédures. Les connaissances procédurales présentent l’inconvénient de se limiter à certaines situations numériques et ainsi, ne sont pas suffisantes pour optimiser les compétences en mathématiques. Les connaissances conceptuelles correspondent à « la compréhension implicite ou explicite des principes qui gouvernent un domaine » (Thevenot et Masson, 2013 ; p. 3). Ce sont donc des connaissances pratiques, flexibles et transférables.

Selon Carpenter (1986), le niveau de compétences en mathématiques s’établit justement par la capacité à lier ces deux types de connaissances. D’ailleurs, Rittle-Johnson, Siegler et Alibali (2001) ont ainsi montré que, dans l’acquisition de connaissances sur les fractions, les procédures et les concepts sont liés et évoluent en interaction, et de manière itérative. Par exemple pour les fractions, le développement des concepts liés aux décimales permet le développement de procédures qui améliorerait ensuite la maîtrise des concepts (Rittle-Johnson et al., 2001). Les élèves auraient besoin de comprendre comment procédures et concepts s’articulent entre eux. Les deux aspects seraient aux deux extrêmes d’un continuum. Les connaissances procédurales concernent les habiletés à réaliser des séquences d’actions pour résoudre un problème. Bien souvent, cela nécessite l’apprentissage des étapes de résolution pas à pas. Les connaissances conceptuelles sont quant à elles la compréhension des principes d’un domaine et des relations entre les unités d’un domaine.

Se centrer sur les concepts ne permet pas d’élaborer sur du concret et en lien avec la pratique, tandis que se centrer sur les procédures ne permet pas la généralisation. En portant à la fois sur les concepts et les procédures, l’enseignement permet la construction de connaissances adaptatives et flexibles. (Baroody et Dowker, 2003).

Un entraînement basé sur les connaissances procédures, conceptuelles ou les deux semble toutefois insuffisant, au regard des éléments dont nous disposons actuellement. Ces considérations ne prennent pas en compte le contenu des apprentissages, c’est-à-dire les représentations numériques et les liens qu’elles doivent entretenir.

3.2. L’entraînement aux représentations non-symboliques

Nous avons vu que les capacités d’estimation numérique et le rôle de la représentation sémantique des nombres ne sont pris en compte, ni dans les programmes officiels, ni dans les documents pédagogiques. En effet, la stratégie visant à estimer une valeur ou une grandeur (l’approximation) est moins stimulée à l’école élémentaire que les autres procédures de dénombrement (correspondance, comptage, *subitizing*). Elle est pourtant essentielle car elle guide le développement du sens des nombres et du calcul, et reste la plus écologique dans la vie quotidienne. Par exemple, nous n’avons jamais besoin de compter exactement le total de nos articles avant de passer en caisse pour savoir si nous avons suffisamment de monnaie. L’approximation est nécessaire également à la construction de la ligne numérique mentale puisque la représentation de la position des nombres est estimée, approximative. De plus, l’intégration entre le système numérique conventionnel et le sens des nombres permet de donner une signification aux apprentissages numériques et aux concepts mathématiques.

Ce type de considération prend petit à petit de l'ampleur dans la compréhension des apprentissages numériques. Avec les travaux de Dehaene, puis ceux de von Aster, et avec les résultats de recherches qui en découlent, la représentation analogique - et notamment le sens qu'elle véhicule - se positionne comme fondamentale dans l'apprentissage de l'arithmétique.

Parmi ces recherches, il y a celle de Park et Brannon (2013) ont mis en place un entraînement aux additions et soustractions approximatives de quantités durant 10 séances auprès d'adultes tout-venants. En pré- et post-tests, les participants doivent résoudre des problèmes additifs et soustractifs à plusieurs nombres. Les participants améliorent leurs compétences numériques approximatives au fil des séances d'entraînement et deviennent de plus en plus précis avec un ratio de plus en plus petit. Ils améliorent également leurs performances numériques symboliques après l'entraînement, ce qui indique un transfert des progrès en arithmétique non-symbolique vers les performances en arithmétique symbolique. Ces effets ne sont pas liés aux différences initiales en mathématiques ou en vocabulaire.

Comme évoqué en introduction, Hyde et ses collaborateurs (2014) ont des résultats similaires sur les performances mathématiques symboliques et exactes chez des enfants de 6-7 ans suite à un court entraînement non symbolique.

L'entraînement aux représentations non-symboliques semble pertinent et adapté auprès d'enfants, d'adolescents ou d'adultes au développement typique ou perturbé. Toutefois, très peu d'études ne s'appuient sur cette représentation dans un contexte d'apprentissage scolaire. Les premières études à en faire mention sont celles qui ont recourt aux jeux de plateaux.

3.2.1. A l'origine, les jeux de plateaux

Obersteiner, Reiss et Ufer (2013) ont réalisé auprès de 147 enfants de CP dix séances de 30 minutes d'entraînement soit au système numérique approximatif, soit au système numérique exact, soit aux deux, sur la base du jeu « The Number Race » (Wilson, Dehaene, Dubois et Fayol, 2006). Leurs résultats indiquent une amélioration des performances en arithmétique pour les deux types d'entraînement seuls, ainsi qu'une amélioration des capacités de comparaison de nombres quand l'entraînement est seulement approximatif. Les études qui s'appuient sur un entraînement analogique non-symbolique sont encore peu nombreuses car la plupart des auteurs considèrent encore souvent qu'il faut privilégier les correspondances entre les représentations symboliques.

Quelques recherches ont néanmoins étudié les effets de jeux numériques symboliques et non-symboliques comme les jeux de serpents et d'échelles (similaires au jeu de l'oie). L'avantage de ce type d'activité est qu'il permet, au cours d'une activité ludique, d'apporter à l'élève des informations sur l'arrangement des nombres et leur magnitude (Siegler et Booth, 2004). De plus, cette activité permet de créer une représentation linéaire des nombres et de matérialiser physiquement la ligne numérique mentale. Toutefois, les enfants ne sont pas tous égaux quant à l'accès à ces jeux numériques, ou même à toutes autres activités numériques. Le niveau socio-économique créé des inégalités dans l'expérience de ce type de jeux et peut ainsi, indirectement en plus d'autres facteurs, entraîner des différences dans la compréhension numérique précoce. En effet, l'expérience de ce type de jeu à la maison est corrélée positivement avec la connaissance numérique (Ramani et Siegler, 2008).

Ramani et Siegler (2008) ont créé un jeu de l'oie, « The Great Race », qui sollicite l'estimation numérique sur une ligne numérique externe. Sur le plateau de jeu, les nombres de 1 à 10 dans des cercles de couleurs sont organisés horizontalement. A chaque tour, le participant peut avancer d'une ou deux cases. Deux conditions sont possibles : la condition nombre, où le participant utilise les nombres du plateau et la condition couleurs, où le participant se réfère uniquement aux couleurs des cases. Ce jeu est utilisé par période de 15 minutes durant quatre séances auprès d'enfants de 4,6 ans en moyenne dans l'une des deux conditions. Avant et après l'entraînement, les participants ont tous réalisé un tâche de ligne numérique. Le simple entraînement à la condition nombre permettait de réduire la variabilité interindividuelle dans les compétences d'estimation numérique à la tâche de ligne numérique entre les enfants de niveau socio-économique favorisé et défavorisé. Les estimations à cette tâche suivaient davantage une courbe linéaire après les sessions de jeu. Il n'y avait pas d'effet dans la condition couleur. Ces résultats indiquent l'importance d'activités sollicitant le système analogique pour, d'une part, réduire les inégalités sociales dans les compétences numériques de base. De plus, il semblerait que ce type de jeu ait également des répercussions sur les compétences de comptage, d'identification de nombres et de comparaison relative de quantités (Ramani et Siegler, 2008).

Au final, si les activités de type jeu de l'oie génèrent des effets bénéfiques validés empiriquement, elles présentent également quelques limites à prendre en considération. Tout d'abord ce type de jeu reste d'un usage limité et sporadique au domicile familial. Ce type de jeu peut également compléter les apprentissages scolaires mais de façon restreinte. L'inconvénient en situation de classe tient aussi au fait que ce type de jeu ne peut pas vraiment se jouer à plusieurs et qu'il n'est donc pas réellement écologique. On peut enfin ajouter que la taille des valeurs numériques exercées avec ce type de jeu est limitée.

3.2.2. Les programmes informatiques de remédiation

« The Number Race » est un jeu adaptatif élaboré par Wilson, Dehaene, Pinel, Revkin, Cohen et Cohen (2006) pour améliorer le « sens du nombre ». Il s'agit d'un jeu informatisé, comme un plateau de jeu où l'enfant doit battre l'ordinateur. A chaque situation, il doit choisir l'item le plus grand des deux (quantités, nombres écrit ou oraux). Après chaque réponse, on leur présente simultanément les trois représentations. Dans des niveaux plus complexes, on peut également présenter aux enfants des additions ou des soustractions. Une étude réalisée auprès d'enfants de Maternelle dont le niveau socio-culturel de la famille est faible (Wilson, Dehaene, Dubois et Fayol, 2009). Les résultats montrent une amélioration des compétences dans les tâches de comparaison numérique non analogique (« sens du nombre »). Les auteurs concluent à une amélioration de l'accès au sens des nombres ou à la mise en correspondance entre le code analogique et les codes symbolique.

Kucian, Grond, Rotzer, Henzi, Schönmann, Plangger, Gälli, Martin et von Aster (2011) ont quant à eux mis au point un entraînement à la ligne numérique mentale, « Rescue Calcularis » pour les enfants dyscalculiques. Les enfants doivent placer des nombres, des résultats de calculs ou des quantités sur une ligne numérique allant de 0 à 100. Après un entraînement quasi-quotidien de 5 minutes par jour durant 5 semaines, les enfants deviennent plus précis dans leur représentation spatiale des nombres sur la ligne et plus performants en résolution de problèmes. Des enregistrements cérébraux ont permis de montrer également des changements d'activité dans les zones hypo-activées chez ces enfants ainsi que des arguments neuro-anatomiques en faveur d'une automatisation des processus de raisonnement mathématique après l'entraînement.

Ce type d'entraînement est similaire à celui réalisé dans notre étude avec le programme "Estimateur". Nous allons maintenant expliquer les principes de ce programme, son fonctionnement et les résultats des études qui l'ont utilisé.

3.3. L’’’Estimateur”

3.3.1. Principes

L’”Estimateur” (Vilette, 2009) a été conçu avec comme objectif initial « d’apprendre aux enfants à réaliser des opérations d’additions ou de soustractions qu’ils ne parviennent pas encore à maîtriser » (Vilette, Mawart et Rusinek, 2010, p.2). Il s’agit de mettre en interaction deux systèmes de traitement du nombre et du calcul : le système symbolique verbal ou oral et le système analogique spatial. En appariant ainsi les deux types de représentations on donne du sens au système symbolique puisqu’à chaque nombre va correspondre à une grandeur. Ce type d’activités se rapproche des épreuves de *mapping* de type « *number-to-position* » (Kolkman, Kroesbergen et Leserman, 2013 ; Laski et Siegler, 2007) qui nécessite d’accéder à l’information sémantique (non symbolique) pour placer précisément un nombre symbolique.

Pour cela, on demande au sujet de situer la position d’un nombre sur une ligne de réponse bornée de 0 à 1000 au maximum, graduée ou non. Nous appelons ce type de représentation une ligne mais il ne doit pas être confondu avec la « ligne numérique mentale » où les nombres n’occupent pas le même espace (la même unité) puisqu’ils sont représentés selon leur fréquence et leur connaissance. Il ne s’agit pas non plus d’une règle graduée ou d’une bande numérique puisqu’on se situe dans l’arithmétique approximative.

Ce type de tâche d’appariement permet un apprentissage structuré sur le sens des nombres sans nécessiter de calcul exact. Il s’agit de solliciter une compétence de « bas niveau » mais qui est, comme nous l’avons vu, indispensable pour asseoir ultérieurement les apprentissages plus complexes.

Il a été programmé pour travailler différentes situations numériques : sur les collections, sur les nombres ou sur les opérations (additions, soustractions, divisions ou multiplications). Plusieurs paramètres sont à définir avant le démarrage d’une session. Cela permet entre autre d’adapter l’utilisation du logiciel au cas par cas, en fonction des caractéristiques et des possibilités de chaque sujet mais également selon sa progression individuelle. Chaque session comporte 10 items et il faut atteindre un critère de réussite de 70% de bonnes réponses pour passer à un autre niveau d’exercice.

Face à un item, le participant peut réagir de deux manières (Vilette et Schneider, 2009):

- soit il connaît précisément la réponse (calculs simples ou mémorisés) et il va alors chercher à se rapprocher le plus possible de la position du résultat sur la ligne de réponse ;

- soit il ne connaît pas la réponse et peut alors se servir de savoirs approximatifs pour le calcul (par exemple 19+23, il peut additionner 20 et 23 qui sont plus simples à calculer), ou d'approximation sur la ligne (avec le même exemple, situer à peu près 20 puis doubler la longueur sur la ligne).

L'"Estimateur" est un outil d'apprentissage scolaire qui ne peut pas se substituer aux apprentissages habituels. Il vient plutôt les compléter et les accompagner. C'est pourquoi il est indispensable d'utiliser cet outil conjointement aux activités pédagogiques qui permettent d'acquérir les connaissances mathématiques conventionnelles.

3.3.2. Fonctionnement

Le programme se présente toujours comme suit : sur un écran d'ordinateur, le programme génère aléatoirement un stimulus cible : une quantité (≤24), un calcul de quantité (addition ou soustraction), un nombre (jusqu'à 1000) ou un calcul avec des nombres écrits (addition, soustraction, multiplication ou division). Au bas de l'écran, une ligne de réponse de 0 à 1000 maximum apparaît. Cette ligne peut être graduée ou non en fonction des objectifs visés. Les participants cliquent sur la ligne à l'endroit où il pense que se positionne la quantité ou le nombre cible ce qui permet une mise en correspondance entre un nombre symbolique et sa grandeur analogique. Ils doivent répondre aussi précisément que possible. En fonction des paramètres qu'on choisit, la réponse autorisée peut s'éloigner jusqu'à +/-50 unités de la réponse attendue.

Ainsi, selon les objectifs visés, il est possible d'ajuster plusieurs paramètres :

- le type de situation problème : activité sur les quantités, sur les nombres, addition, soustraction, division ou multiplication ;
- la taille du champ numérique : 0 à 12, 0 à 24, 0 à 60, 0 à 100, 0 à 500 ou 0 à 1000 ;
- la graduation de la ligne numérique : graduée à la moitié, au quart, à la dizaine, à la centaine, ou à pas de 1 ;
- la précision attendue pour la réponse : précision à plus ou moins une, deux, trois, cinq, dix ou cinquante unité(s).

3.3.3. Résultats antérieurs

Après une étude exploratoire qui a révélé l'intérêt des enfants à utiliser l'"Estimateur", des études de remédiation ont eu lieu afin de tester les effets du programme. Une première étude, menée en 2008 sur 20 élèves de CM2 présentant d'importantes difficultés en mathématiques a montré des résultats très encourageants (Vilette, Mawart et Rusinek, 2010). Initialement, tous les élèves ont des performances mathématiques inférieures au premier quartile des normes au ZAREKI-R (score inférieur à 132). La moitié des participants a bénéficié de sept sessions d'entraînement au calcul exact par l'intermédiaire de jeux informatiques usuels et l'autre moitié a suivi sept sessions d'entraînement sur l'"Estimateur" sur les additions et les soustractions. Les résultats sont sans appel : 70% des enfants du groupe qui a utilisé l'"Estimateur" obtiennent un score supérieur à 132 au ZAREKI-R alors qu'ils ne sont que 30% dans le groupe contrôle. Ces premiers résultats justifient la pertinence d'un entraînement au calcul approximatif et à l'appariement entre représentations par rapport aux apprentissages numériques exacts classiques.

Par la suite, l'"Estimateur" a été utilisé auprès d'enfants qui présentent une dyscalculie (performances en mathématiques inférieures à deux écarts-types au ZAREKI-R avec au moins deux années d'apprentissages) associée à un trouble du langage écrit et/ou oral. L'entraînement correspond à sept séances d'environ 45 minutes dont la progression évolue en fonction des performances initiales de l'enfant, ses difficultés, ses progrès et sa motivation. On fait varier la difficulté des situations proposées en terme d'opérations (dénombrement, addition puis soustraction), de taille des nombres (0 à 12, 0 à 32, 0 à 60... jusqu'à 1000 si possible), et de nombres de repères sur la ligne (unités, dizaines, centaines, au quart, à la moitié, sans repères). L'objectif final est de réussir une situation numérique sur une taille de nombres élevée avec le moins de repères possible sur la ligne numérique. Des études de cas sont décrites par Vilette et Schneider (2011). Même si les résultats varient d'un enfant à l'autre, les performances en mathématiques s'améliorent chez tous les participants. De plus, les résultats indiquent que les troubles langagiers se répercutent sur l'appariement entre les codes et la représentation mentale des nombres. Toutefois, cela n'empêche pas la connaissance sur les grandeurs et leurs comparaisons.

Nous évoquerons dans la troisième partie, une étude où l'"Estimateur" a été utilisé auprès d'enfants et d'adolescents atteints de trisomie 21. Dans ce syndrome, les difficultés mathématiques sont très marquées tandis que les difficultés langagières sont moins importantes.

Comme nous l'avons vu précédemment, un ensemble d'études en neuropsychologie, en psychologie du développement et en neuroimagerie, ont démontré le rôle du code analogique dans la construction du nombre chez les enfants. La représentation analogique et sa mise en correspondance avec le système symbolique conventionnel sont indispensables aux apprentissages puisqu'ils permettent de donner du sens aux nombres symboliques et aux calculs. De même, il existerait un lien très fort entre les capacités des enfants à mobiliser le code analogique et leurs compétences arithmétiques ultérieures (Halberda, Mazzocco et Feigenson, 2008 ; Piazza, Facoetti, Trussardi et al., 2010).

Toutefois, ces aspects ne sont pas pris en compte dans la construction des programmes officiels d'enseignement et les compétences qui y sont rattachées ne sont pas entraînées à l'école Elémentaire. Et comme le montrent les enquêtes nationales et internationales, les enfants sont « mauvais élèves » en mathématiques et leur niveau continue de s'affaiblir. Ainsi, nous faisons l'hypothèse que les difficultés d'apprentissage proviennent d'un enseignement détaché du sens des nombres et du calcul. Il apparaît alors essentiel de structurer l'enseignement autour de l'interaction entre les systèmes symboliques et analogique. Pour cela, nous avons intégré l'utilisation de l'"Estimateur" en parallèle avec d'autres activités dans une recherche de grandeur ampleur (plusieurs académies étant impliquées) visant à tester une nouvelle progression mathématique pour le Cours Préparatoire. Nous allons maintenant présenter cette étude, ses objectifs et les résultats actuels.

Chapitre 5

L'estimation et la mise en correspondance entre les codes dans le programme de CP : amélioration des compétences mathématiques ?

Résultats issus de la recherche ACE (Arithmétique et Compréhension à l'Ecole Elémentaire)

En 2010, la Direction Générale de l'Enseignement Scolaire (DGESCO) a sollicité plusieurs universitaires afin de concevoir et mettre en oeuvre une nouvelle progression pour l'enseignement des mathématiques en CP. Les universitaires concernés par cet appel étaient Gérard Sensevy (Université de Rennes 2), Emmanuel Sander (Université de Paris 5), Jean-Paul Fischer (Université de Nancy) et Bruno Vilette (Université de Lille 3). Une équipe de recherche s'est constituée autour de chaque universitaire avec des doctorants, des Maîtres Formateurs, les Inspecteurs de l'Education Nationale et des conseillers pédagogiques afin de mettre au point cette progression. La phase d'expérimentation sur le terrain en classe de CP a été mise en oeuvre dans quatre académies : Rennes, Marseille, Paris et Lille.

Quatre hypothèses générales ont sous-tendu la construction de la progression :

1- La sollicitation constante de l'estimation numérique et l'interaction des différents systèmes de représentations du nombre et du calcul.

2- L'apport de séances intenses et quotidiennes du calcul mental afin de consolider les connaissances et les automatiser.

3- La pratique de situations évolutives où les élèves expérimentent réellement les mathématiques en maniant les différentes représentations et en utilisant la composition/décomposition de manière privilégiée,

4- Une activité accompagnée de recodage sémantique lors de la résolution de problèmes afin de donner du sens aux notions à acquérir.

C'est évidemment la première hypothèse qui a mobilisé plus particulièrement la suite de notre travail. Nous allons maintenant décrire davantage la recherche ACE, ses participants ainsi que l'outil utilisé pour entraîner à l'estimation numérique ; puis nous analyserons la pertinence des activités d'estimation proposées dans la progression.

1. Cadre général de la recherche ACE

Le fonctionnement de la progression est basé sur une succession de situations progressives et emboîtées. Elle se veut répondre à un principe de continuité dans les savoirs et dans l'expérience mathématique des élèves. De ce fait, les élèves savent toujours de quoi il est question, puisque les situations partagent toujours la même structure de base. Ils peuvent ainsi centrer leur attention et leur mémorisation uniquement sur les variations propres à chaque séquence. Ces situations font référence à quatre domaines : le jeu des annonces (nombre, addition, soustraction), la résolution de problème (résolution et sémantique des problèmes), le calcul mental (internalisation des connaissances) et les activités d'estimation (mise en correspondance des différentes représentations numériques). La plupart des points fondamentaux listés dans « Le nombre au cycle 2 » présenté plus haut, font partie intégrantes de la progression. Notre propos ici n'est pas de comparer les quatre apports majeurs de la progression ACE mais bien de tenter de montrer l'intérêt d'un entraînement à l'estimation dans un dispositif scolaire complet au CP.

Nous allons détailler ici (1) l'adaptation du logiciel « "Estimateur"» au Cours Préparatoire, (2) l'élaboration de la progression Estimation, (3) la mise en œuvre et (4) l'évaluation de l'impact d'un entraînement régulier à l'estimation numérique sur les apprentissages mathématiques.

1.1. Déroulement

Durant l'année 2011/2012, les quatre équipes ont élaboré une progression complète en mathématiques (hors géométrie) qui respecte les instructions du B.O. de 2008, et qui intègre les apports récents de la psychologie et des sciences de l'éducation.

La progression est élaborée de sorte qu'à chaque semaine de l'année scolaire, tous les élèves de CP bénéficient d'1 heure et 15 minutes de mathématique répartie en deux séances (une longue et une courte) pendant quatre jours. Chaque jour, il est ainsi prévu entre 15 et 30 minutes de calcul mental et entre 45 minutes et une heure de calcul situationnel, de résolution de problème ou d'estimation numérique.

Durant l'année 2012/2013, l'expérimentation a été mise en œuvre pour la première fois dans les académies de Rennes, Marseille, Lille et Paris, avec 60 classes expérimentales et 60 classes témoins. Préalablement à l'expérimentation, une formation spécifique à la progression a été apportée à tous les enseignants des classes expérimentales afin de dégager les points essentiels de la progression, faciliter la compréhension des fondements et l'exploitation des outils de la progression. De nombreuses visites en classe ont également été programmées durant l'année pour accompagner les enseignants. Enfin, une réunion par période était organisée (soit au total 5 réunions sur l'année) afin d'échanger sur les aspects pratiques de la mise en œuvre. Durant cette première année, et afin d'évaluer les effets de cette méthode, un pré-test et un post-test ont été réalisés respectivement en début et fin d'année scolaire.

Précisons enfin que les enseignants qui mettent en œuvre la progression sont également des acteurs de la recherche et qu'ils contribuent par leurs échanges et leurs retours à modifier et à améliorer la progression elle-même.

En 2013/2014, d'autres enseignants ont mis en œuvre la progression et la plupart des enseignants en 2012/2013 ont volontairement décidé de poursuivre la recherche et de mettre en œuvre la progression une seconde fois. Ce sont alors 120 classes expérimentales qui ont participé à l'expérimentation sur les quatre académies concernées.

En 2014/2015, la progression ACE n'est plus en phase expérimentale mais en phase d'essaimage.

1.2. Les activités d'estimation numérique

1.2.1. Adaptation du logiciel

Comme mentionné plus haut, la progression est composée de quatre types d'activités différents. Nous allons développer ici uniquement l'apport de notre équipe de recherche qui concerne l'estimation numérique, le calcul approximatif et la mise en correspondance entre les représentations numériques.

Notre contribution s'articule principalement (mais pas exclusivement) autour du logiciel "Estimateur", initialement conçu pour la rééducation des troubles du nombre et du calcul. Il a donc été adapté afin de correspondre aux exigences et aux objectifs du niveau CP.

Les principales adaptations sont les suivantes :

- *attractivité de l'interface :* couleurs modifiées, ajout d'images ludiques et stimulantes
- *simplification des menus et du paramétrage afin de faciliter l'utilisation par les élèves* : limitation du nombre de menus et de paramètres à sélectionner, simplification langagière, instauration d'un code couleur, ...
- *programmation d'activités de niveau CP* (pour les nombres, l'addition et la soustraction) pour les nombres compris entre 1 et 100 ;

- *affichage et enregistrement des performances* : barre de progression pour situer rapidement la performance de l'élève selon un seuil de réussite fixé à 70% de bonnes réponses ; enregistrement d'un fichier de résultats pour chaque session ;
- *réponses aux contraintes des salles informatiques de l'Ecole Primaire* : possibilité d'utiliser le logiciel en binôme et ajout d'indicateurs permettant à l'enseignant de suivre chaque élève.

Au final, un logiciel plus attractif et plus ergonomique a été développé afin qu'il soit adapté aux possibilités des enfants de cet âge (Figure 8). Ces modifications ont été retenues après des pré-tests auprès d'enfants de CP.

Durant toute l'année scolaire, l'"Estimateur" est utilisé presque toutes les semaines lors d'une séance longue d'environ 45 minutes. Le choix des exercices (collections, nombres, additions ou soustractions) dépend des autres activités mathématiques réalisées au même moment, des objectifs de l'enseignant et de la progression de chaque élève. Cette progression est suivie notamment avec le Parcours "Estimateur".

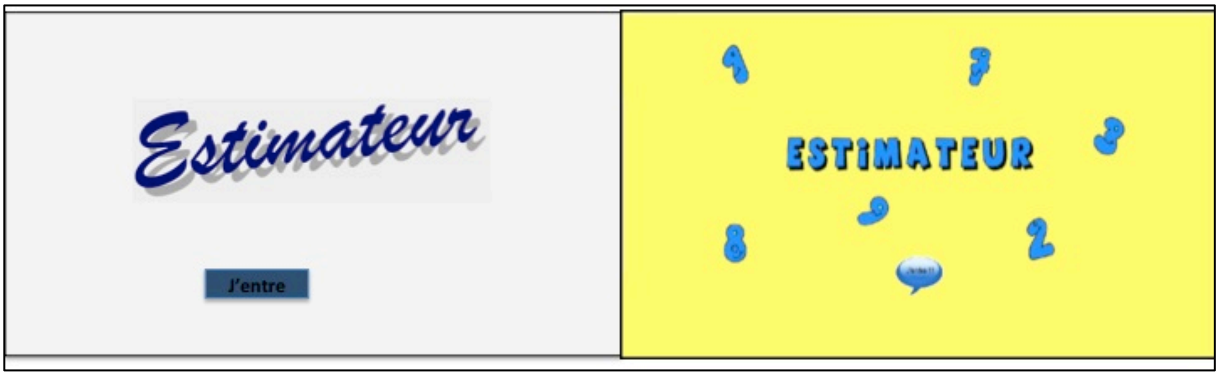


Figure 8. Ecran d'accueil de l'"Estimateur" avant (à gauche) – après (à droite)

1.2.2. Le Parcours "Estimateur", progression individuelle sur le jeu

Pour permettre un parcours individualisé, l'entraînement sur l'"Estimateur" est réalisé de manière progressive et en fonction des possibilités de chaque élève ou binôme. Pour cela, le « Parcours "Estimateur" » comprend un cheminement basique, commun à tous les élèves, qui correspond aux objectifs à atteindre avec le logiciel. En parallèle, plusieurs séances décrochées ou de remédiation sont prévues afin de débloquer les élèves en difficultés et les aider à atteindre ces objectifs.

De ce fait, un parcours est prévu pour chacune des opérations proposées : « Collection », « Nombre », « Addition » et « Soustraction ». Quelle que soit l'activité, on tente d'amener les élèves à faire correspondre un nombre et sa grandeur de la manière la plus précise possible, et sur des nombres de plus en plus grands.

Pour l'option « Collections », l'objectif à atteindre est de situer la numérosité exacte d'une collection de carrés ou le résultat d'une addition (ou d'une soustraction) de carrés. Dans ce cas précis, et uniquement dans ce cas, la ligne numérique est graduée de 1 en 1. Il s'agit pour l'élève de trouver le nombre exact correspondant à la numérosité présentée ou au résultat de l'addition (soustraction) présentée. Pour les options « Nombres », « Additions » et « Soustractions », l'objectif est toujours de situer le plus précisément possible sur la ligne numérique bornée la position correspondant à un nombre ou au résultat d'une addition/soustraction écrite.

Tout au long de l'année, chaque élève chemine sur son Parcours, à son rythme et selon les activités numériques réalisées dans les autres domaines.

1.2.3. Les séances décrochées

Les remédiations proposées sont fonction des difficultés rencontrées par l'élève. C'est l'enseignant qui, au regard de chaque élève, va proposer l'aide qui semble la plus adaptée.

Ainsi, si un élève n'arrive pas à faire le lien entre un nombre et son éventuelle position, on peut faire varier la graduation de la ligne (d'abord une graduation indiquant la moitié entre les deux bornes, puis le quart s'il reste en échec). La graduation devient alors une aide à la réflexion et/ou permet l'autocorrection.

En cas de difficulté dans la lecture des nombres, nous proposons des activités décrochées pour faire travailler la numération (flash-cards, tableaux de nombres, loto, jeux rapides sur ardoises).

Si l'élève surcompte sur la ligne numérique pour trouver la position, il est demandé d'empêcher cette stratégie qui s'avère contre productive puisqu'elle fait échouer l'élève. On peut alors ajouter un *timer* pour forcer une réponse spontanée et rapide. On peut également limiter le nombre de réponses possibles sur la ligne (2 ou 3 par exemple). On insiste enfin au moyen des consignes sur l'activité d'estimation demandée.

Pour terminer, si l'élève ne parvient pas à répondre de manière efficiente, on peut lui proposer des activités papier/crayon pour l'amener à arrondir les nombres, à considérer les nombres comme des longueurs dans un calcul, ... et éventuellement réaliser des séances en classes entières en faisant verbaliser les stratégies de chacun.

1.3. Participants

Nous considérerons ici uniquement les participants à l'expérimentation de 2013/2014 car cela permet : 1) d'évaluer les effets de la progression améliorée suite à une première année de mise en œuvre ; et 2) de prendre en compte l'expertise des enseignants dans la mise en œuvre de la progression (comme variable indépendante).

Au total, lors de la deuxième année d'expérimentation, ce sont 120 classes expérimentales de CP et 120 classes témoins CP qui participent. La moitié des classes sont situées dans des écoles labellisées Réseau de Réussite Scolaire (RRS, ex-RAR), correspondant à des écoles en éducation prioritaire où les inégalités socio-économiques sont fortes.

Notre considérerons, dans un premier temps, uniquement les résultats obtenus dans l'Académie du Nord. Nous avons ainsi 748 élèves répartis en un groupe expérimental (réalisant la progression ACE, n=582) et un groupe témoin (progression habituelle, N=166). Dans le groupe expérimental, 236 élèves étaient scolarisés en milieu RRS où il y a de fortes inégalités socio-économique et les autres en milieu ordinaire. Pour les deux types de milieu, certains enseignants mettaient en oeuvre pour la 2ème année consécutive la progression ACE, leur expertise et maîtrise est alors supposée supérieure aux autres enseignants. Le groupe témoin est composé uniquement d'élèves scolarisés en milieu ordinaire (Tableau 1).

<table>
<tr><th></th><th>Progression ACE
Milieu RRS</th><th>Progression ACE
Milieu ordinaire</th><th>Témoins
Milieu ordinaire</th></tr>
<tr><td>1ère année d'expérimentation</td><td>121</td><td>227</td><td rowspan="2">166</td></tr>
<tr><td>2ème année d'expérimentation</td><td>115</td><td>119</td></tr>
</table>

Tableau 1. Répartition des participants de l'Académie du Nord dans chaque groupe (expérimental / témoins)

Nous avons également pris en compte les résultats de l'Académie d'Aix-Marseille où certaines classes expérimentales n'ont pas pu mettre en oeuvre la progression ACE complète. En effet, pour des raisons matérielles, seules les séances initiales d'entraînement à l'Estimation numérique ont été réalisées (3 séances). Les séances sur l'"Estimateur" n'ont jamais pu être effectuées. Nous avons ainsi un moyen d'étudier les effets de la progression ACE sans les activités d'estimation hebdomadaire et donc d'en vérifier l'intérêt et le rôle (Tableau 2).

<table>
<tr><th colspan="2">Groupe</th><th>Milieu RRS</th><th>Milieu ordinaire</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Groupe expérimental</td><td>ACE
Avec activités d’estimations</td><td>20</td><td>133</td></tr>
<tr><td>ACE
Sans activités d’estimations</td><td>196</td><td>90</td></tr>
<tr><td>Groupe témoins</td><td>Progression habituelle</td><td>163</td><td>193</td></tr>
</table>

Tableau 2. Répartition des participants de l’Académie d’Aix-Marseille dans chaque groupe (expérimental / témoins) et en fonction de la réalisation des activités d’estimation

2. Procédure

2.1. Groupe expérimental

Tout au long de l’année scolaire, les élèves du groupe expérimental ont donc suivi la progression ACE qui est composée de diverses activités en lien avec les hypothèses développées plus haut (calcul mental, résolutions de problèmes, situations de calcul) et d’une séance hebdomadaire de 45 mn avec un programme informatique (le logiciel ”Estimateur”) pour exercer l’estimation numérique et les correspondances entre représentations symboliques et non symboliques.

Les séances avec l’”Estimateur” ont lieu la plupart du temps en binôme dont le niveau est relativement homogène. En fonction du programme et des activités que l’enseignant souhaite réaliser durant la séance, chaque élève dispose de son Parcours individuel pour l’”Estimateur” et sait exactement ce qu’il doit faire. Les échanges entre binôme sont autorisés et permettent parfois de débloquer certains élèves car ils partagent une même compréhension de l’activité et un langage commun.

Les classes de l’académie de Marseille ont réalisé la progression ACE mais n’ont pas eu la possibilité de travailler sur l’”Estimateur” pour des raisons matérielles. Ils ont donc réalisé la progression complète sans effectuer les activités de mise en correspondance entre les représentations avec l’”Estimateur”.

2.2. Groupe contrôle

Le groupe contrôle suit la progression mathématique habituelle de leur enseignant. Les progressions sont la plupart du temps issues d'outils pédagogiques tels que « Cap Math » ou « Ermel » présentés plus haut. Ils ne sont pas informés du contenu de la progression ACE, ni du contenu des pré- et post-tests afin de ne pas influencer leurs pratiques habituelles et ne pas modifier leur progression. Il leur est demandé explicitement de faire comme ils ont l'habitude de faire chaque année.

2.3. Mesures

Tous les élèves sont évalués au début et à la fin de l'année scolaire au moyen d'un Test de Connaissance Mathématique (TCM) qui est composé de plusieurs épreuves arithmétiques (calcul mental, problèmes verbaux, calcul et comparaisons) et d'une tâche de *mapping* numérique. Le TCM contient des épreuves communes aux pré- et post-test et des épreuves différentes qui sont fonction des possibilités des élèves en début d'année. Nous n'allons donc pas comparer directement l'évolution du score brut au TCM en début et fin d'année. La passation du TCM, administré par des expérimentateurs entraînés, est d'environ 45 à 60 minutes en fonction de la gestion de classe. Les consignes, ainsi que les règles de cotation, sont définies *a priori* et appliquées de la même manière dans chaque académie.

La tâche de *mapping* numérique comprend 12 items. Il s'agit de 12 lignes numériques horizontales de 15 centimètres allant de 0 à 30 (6 items) et de 0 à 100 (6 items). Sur chaque ligne, quatre repères sont indiqués. Les élèves doivent entourer le repère qui correspond d'après eux à la position du nombre cible de la ligne. Ce nombre est énoncé à l'oral mais il est également écrit devant chaque ligne.

Les nombres cibles sont : 24, 16, 8, 20, 10, 4 sur 0 à 30 et 35, 82, 54, 14, 68 et 40 sur 0 à 100. Pour chaque ligne, les élèves ont 15 secondes pour entourer la réponse. Au préalable, un item d'exemple est réalisé au tableau.

Sur chaque ligne, un repère correspond à la position exacte du nombre cible et les trois autres sont des positions inexactes situés à plus de 15% d'écart de la réponse exacte. L'ordre du repère correct est contrebalancé afin de contrôler les persévérations. Les nombres cibles ont également été soigneusement choisis afin qu'il y en ait autant sur chaque moitié de la ligne. On comptabilise un point par bonne réponse mais on obtient pour cette épreuve un score total ramené à 10. L'absence de réponse est comptabilisée comme une erreur.

La tâche de *mapping* numérique n'est pas réalisée en pré-test car, *a priori*, il n'y a pas de raison de penser que les performances initiales à cette tâche sont différentes en fonction des élèves.

Nous nous attendons à un effet global de la progression ACE avec des performances au TCM significativement supérieures en fin d'année scolaire dans le groupe expérimental comparativement au groupe contrôle. Nous attendons également que cet effet soit observé aussi bien dans les classes en milieu ordinaire que dans les classes en Réseau Réussite Scolaire. Le score à la tâche de *mapping* devrait également être supérieur pour le groupe expérimental, tant pour les élèves scolarisés en milieu ordinaire qu'en milieu RRS.

Nous prévoyons également que les performances au TCM et à la tâche de *mapping* soient supérieures dans le groupe expérimental de l'Académie de Lille qui a bénéficié des séances d'entraînement à l'"Estimateur" comparativement au groupe expérimental de l'Académie de Marseille qui n'a pas pu les réaliser.

Enfin, pour terminer, nous nous attendons à observer un effet de l'expertise des enseignants selon qu'ils mettent en œuvre la progression pour la première fois ou la seconde fois. En effet, la charge de travail pour l'enseignant est plutôt conséquente pour mettre en oeuvre la progression dans sa classe. Il doit comprendre les fondements des activités et se les approprier pour les exploiter en classes. De plus, les documents mis à disposition des enseignants étant en évolution constante, un important travail d'adaptation leur était demandé sans pour autant avoir (durant la première année d'expérimentation) une vision globale de la progression et des compétences développées. Nous avons alors constaté que tous les enseignants qui ont mis en oeuvre la progression pour la 2ème année consécutive se sont sentis nettement plus en confiance, et ce pour différentes raisons : ils avaient une vision à long terme de la progression, étaient plus libres dans sa réalisation, avaient un travail moins conséquent de lecture et de compréhension des activités et disposaient d'une première expérience de la progression qui facilitait sa reconduction. Ainsi, partant de l'observation que la première année est une année difficile, qui mobilise non seulement beaucoup les enseignants mais qui les contraint à « abandonner » leur pratique habituelle, nous nous attendons à observer un effet d'expertise des enseignants sur les performances au TCM et à la tâche de *mapping*.

3. Résultats

3.1. Effets généraux de la progression ACE

3.1.1. Enseignants en première et deuxième année d'expérimentation sans distinction

Pour évaluer l'effet de la progression ACE sur les performances, nous avons analysé les résultats des groupes expérimentaux de l'Académie du Nord et d'Aix-Marseille qui ont réalisé la progression complète (n=735) ainsi que ceux des groupes témoins (n=516). On ne trouve aucune différence significative entre les deux groupes dans les résultats au TCM en début d'année scolaire (p>.05). Les performances mathématiques initiales sont donc équivalent dans les deux groupes.

Pour mesurer les effets de la progression ACE, nous avons comparé les performances au TCM en fin d'année scolaire pour chaque groupe (Figure 9). On observe une différence significative entre les deux groupes (t(1249)=8,332 ; p<.001). Les résultats indiquent que les performances au TCM en fin d'année sont supérieures pour le groupe ACE (*M*=53,6) comparativement au groupe contrôle (*M*=43).

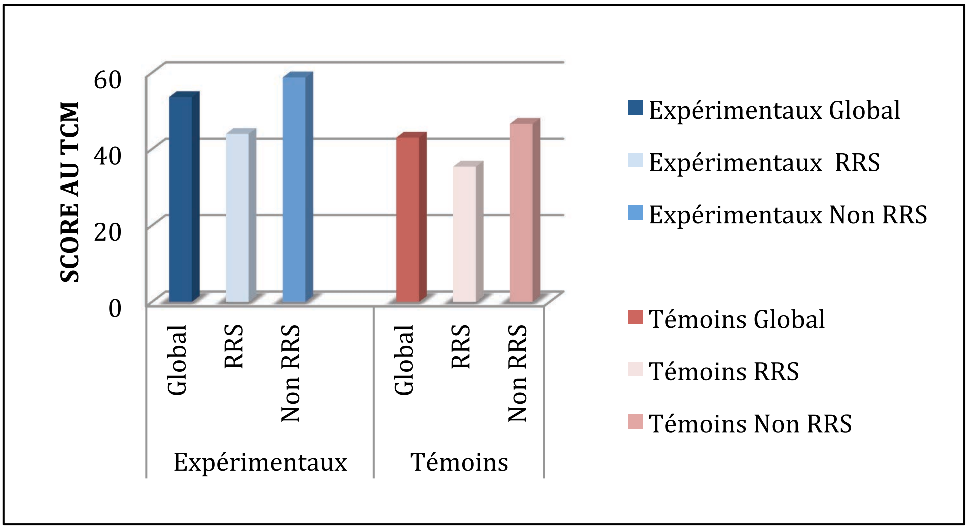


Figure 9. Score moyen au TCM en fin d'année scolaire pour chaque groupe et selon le milieu (RRS ou non RRS – ordinaire)

De la même manière, les performances obtenues en fin d'année à la tâche de *mapping* sont supérieures (t(1249)=14,308 ; p<.,001) pour le groupe ACE (*M*=6,72) par rapport au groupe contrôle (*M*=5,21). La représentation des nombres et la mise en correspondance entre un nombre et sa grandeur semble donc plus précise pour le groupe expérimental.

Nous nous intéressons maintenant aux effets de la progression ACE sur les performances mathématiques en fin d'année selon les zones d'éducation (milieu RRS ou ordinaire). Comme prévu, l'analyse révèle qu'en milieu ordinaire, le groupe expérimental (*M*=58,75) a de meilleurs performances au TCM en fin d'année (t(830)= 8,161, p<.,001) que le groupe contrôle (*M*=46,6). De même, les performances à la tâche de *mapping* sont supérieures pour ce groupe (t(830)= 11,356, p<.,001).

On retrouve le même résultat pour les classes scolarisées en RRS : les performances au TCM sont supérieures (t(417)=4,10, p<.,001) pour le groupe expérimental (*M*=43,97) comparativement au groupe contrôle (*M*=35,38). Là aussi, la tâche de *mapping* est mieux réussie pour le groupe expérimental (t(417)= 9,686, p<.,001).

Enfin, on constate qu'il n'y a pas de différence significative entre le groupe témoin en milieu ordinaire et le groupe expérimental RRS sur les performances mathématiques au TCM (t(607)=-1,523, p=.,12). En revanche, une différence significative en faveur du groupe expérimental existe entre ces groupe dans la réussite à la tâche de *mapping* (t(417)=5,572 ; p<.,001)

Comme nous l'avons souligné plus haut, partant du principe que la première année est plus difficile à mettre en oeuvre pour les enseignants car le programme est nouveau et atypique, nous comparons les résultats au TCM et à la tâche de *mapping* selon l'année d'expérience de l'enseignant.

3.1.2. Effets de l'expertise de l'enseignant sur la progression

Pour cette analyse, nous comparons uniquement les performances des participants de l'Académie de Lille puisque certains ont réalisé la progression pour la première fois en 2013/2014 et d'autres pour la seconde année consécutive.

Dans un premier temps, nous avons comparé les enseignants en milieu ordinaire du groupe expérimental ACE qui ont mis en oeuvre la progression pour la première année en 2013/2014 à ceux pour qui il s'agit de la seconde année. Les résultats indiquent qu'il n'y a pas de différence significative sur les performances au TCM (t(344)= 0,797 ; p=.,426) ainsi qu'à la tâche de *mapping* (t(344)= 1,655 ; p=.,091) entre les deux groupes d'enseignant. Il n'y a donc pas d'effet « d'expertise » de la progression ACE sur les performances mathématiques des élèves scolarisés en milieu ordinaire.

Ensuite, nous avons réalisé la même analyse chez les enseignants en milieu RRS. Les résultats montrent une différence significative ($t(234)= -1,936$; $p<.05$) sur les performances au TCM entre la 1ère année de mise en oeuvre (M=40,1) et la seconde année (M=45,5). Ainsi, l'expérience de l'enseignant dans la mise en oeuvre de la progression semble nuancer les effets sur les performances mathématiques lorsqu'il s'agit d'un enseignement en milieu RRS. Il n'y a en revanche pas de différence significative à la tâche de *mapping*, ($t(234)= 0,674$; p=.,501).

En résumé, les performances mathématiques évaluées par le TCM en fin d'année scolaire sont meilleures si l'enseignement est basé sur la progression ACE complète comparativement à un enseignement classique. Cela est indépendant de la zone d'éducation. De plus, les élèves expérimentaux RRS réussissent à atteindre un niveau non significativement différent de celui des témoins en milieu ordinaire. Cela signifie que la progression ACE permet aux élèves scolarisés en milieu RRS d'atteindre le niveau de réussite mathématique des enfants scolarisés en milieu ordinaire.

De plus, l'expertise de l'enseignant dans la progression ACE semble également jouer un rôle dans les effets de la progression sur les performances mais uniquement quand il s'agit d'élèves scolarisés en milieu RRS.

L'ensemble de ces résultats est extrêmement intéressant au niveau des apports de la progression ACE. Toutefois, ils ne permettent pas de répondre aux questions liées à l'intérêt d'un entraînement systématique aux activités d'estimation et à la mise en correspondance entre les différentes représentations.

3.2. Evaluation du rôle spécifique de l'entraînement à l'estimation numérique

Notre objectif est ici de vérifier si un entraînement hebdomadaire à l'estimation numérique dans le programme d'enseignement de CP est nécessaire à la réussite en mathématique obtenue par la progression ACE. Nous disposons pour cela de résultats au TCM obtenus dans des classes qui n'ont pas pu utiliser l'"Estimateur". Nous pouvons ainsi étudier les effets sur les performances mathématiques en fin de CP :

- de la progression ACE complète,
- de la progression ACE sans les activités d'estimation ("Estimateur")
- des progressions typiques (groupe témoin).

L’examen rapide du Tableau 3 semble indiquer un effet différencié de la progression ACE selon qu’elle inclue ou non l’entraînement à l’”Estimateur”. En effet, les performances mathématiques en fin d’année scolaire sont supérieures si cet entraînement a été réalisé. De plus, cet effet semble exister pour les deux types de milieu scolaire.

Groupe	*“Estimateur” ?*	*Milieu*	*Moyenne au TCM /40*	*Score tâche de mapping*	*N=*
Expérimental	Oui	Ordinaire	23,55	6,89	478
		RRS	18,46	6,37	256
	Non	Ordinaire	20,35	6,31	96
		RRS	17,66	5,74	196
Témoins		Ordinaire	18,5	5,5	353
		RRS	14,19	4,48	163

Tableau 3. Score moyen au TCM et à la tâche de *mapping* selon le groupe

On notera qu’il existe une différence significative de performance entre les deux groupes expérimentaux (avec et sans “Estimateur”) au pré-test. En effet, le groupe expérimental qui n’a pas réalisé les activités d’estimation (Marseille) obtient des performances significativement plus élevées au pré-test que le groupe expérimental qui a réalisé la progression complète (KW=11,690 ; p<.,05). Comme nous allons le voir, cette différence initiale vient renforcer les effets observés au post-test.

3.2.1. Effet global de l’entraînement à l’estimation

Nous avons comparé dans le groupe expérimental le score au TCM en post-test de ceux qui ont réalisé la progression ACE complète (avec l’entraînement hebdomadaire à l’estimation) à ceux qui ont réalisé la progression ACE sans les activités d’estimation (Figure 10). Les conditions d’application du test paramétrique ne sont pas réunies, nous avons alors utilisé un test non-paramétrique. L’analyse statistique révèle un effet significatif sur les performances au TCM (U=115 465,5 ; p=.,05). Le groupe qui a réalisé la progression ACE complète a de meilleures performances (*M*= 53,6) par rapport à l’autre groupe (*M*= 50,77), Les performances à la tâche de *mapping* sont également meilleures dans le groupe expérimental avec les activités d’estimation (t(1025)=6,953 ; p<.,001).

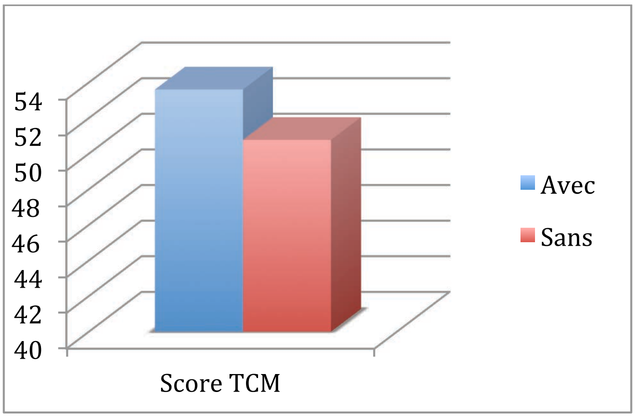


Figure 10. Score moyen au TCM pour le groupe expérimental selon qu'il ait ou non réalisé l'entraînement hebdomadaire à l'estimation numérique.

Ainsi, ne pas bénéficier durant l'année de CP des activités d'entraînement à l'estimation numérique semble atténuer les effets positifs de la progression ACE sur les performances mathématiques.

Il nous semble intéressant d'analyser ensuite si cet effet existe pour les deux types de milieu scolaire.

3.2.2. Effets spécifiques de l'entraînement selon le milieu scolaire

Nous avons d'abord comparé les scores obtenus au TCM et à la tâche de *mapping* pour les élèves en milieu ordinaire selon qu'ils aient ou non réalisé la progression ACE complète. L'analyse révèle qu'il n'y a pas de différence significative entre les deux groupes ($t(572)=1,012$; $p=.,32$). En revanche, nous obtenons une différence significative sur les performances à la tâche d'estimation entre les deux groupes expérimentaux scolarisés en milieu ordinaire ($t(572)= 3,320$; $p<.,001$).

Nous avons ensuite réalisé la même analyse sur les élèves scolarisés en milieu RRS. On trouve un effet significatif pour le groupe qui a réalisé la progression ACE complète sur les performances mathématiques au TCM ($t(450)= 1,993$; $p<.,05$). Il y a également un effet de ce groupe sur les performances à la tâche de *mapping* ($t(450)= 3,978$; $p<.,001$).

Etant donné ces résultats, nous pouvons dire qu'un entraînement régulier et hebdomadaire à l'estimation numérique est une valeur ajoutée à la progression mathématique de CP. De plus, cet entraînement semble particulièrement bénéfique pour les élèves scolarisés en milieu RRS.

3.2.3. Analyse de la précision des estimations

Les résultats issus de l'année d'expérimentation 2012/2013 nous permettent d'apporter une information supplémentaire. L'évaluation des performances mathématiques en début et fin d'année scolaire se faisait également à l'aide du TCM excepté pour la tâche de *mapping* qui était légèrement différente. On demandait alors aux élèves de marquer par un trait la position d'un nombre cible sur une ligne de 15 centimètres graduée de 0 à 30 ou 0 à 100. Cet exercice, très proche de ceux de l'"Estimateur", nous permettait alors d'évaluer la précision des estimations en mesurant la distance (en centimètres) entre la cible et la réponse. Nous avions déjà observé alors les mêmes effets lors de la première année d'expérimentation (2012/13) que ceux de la seconde année 2013/14, à savoir un effet du groupe expérimental ACE versus témoin ainsi qu'un effet de ACE avec "Estimateur" versus sans "Estimateur".

Pour l'année 2012/13, nous avons calculé pour chaque groupe l'écart moyen aux quatre items à la tâche d'estimation (cf. Tableau 3). Ainsi, plus la distance moyenne de la cible est élevé, plus l'écart est important et l'estimation moins précise.

En observant le Tableau 4, nous constatons : 1) que le groupe ACE répond de manière plus précise que les autres groupes ; 2) le groupe contrôle présente les performances les moins précises ; 3) le groupe ACE sans Estimation RRS (Marseille) répond de manière aussi précise que le groupe contrôle RRS et 4) les classes RRS qui ont réalisé la progression ACE répondent moins précisément que les classes en milieu ordinaire.

La distance moyenne de la cible n'est pas statistiquement différente pour le groupe ACE (Lille) en milieu RRS comparativement à celui en milieu ordinaire (U=12 029, p=.,67). En revanche, la distance moyenne est significativement plus élevée pour le groupe ACE scolarisé en milieu RRS qui n'a pas réalisé l'entraînement à l'Estimation (Marseille) par rapport au groupe ACE avec Estimation en milieu RRS (U=18 324 ; p<.,001). Ainsi, la représentation des nombres est moins précise pour ceux qui n'ont pas bénéficié de l'entraînement hebdomadaire à l'estimation et qui sont scolarisés en milieu RRS.

Groupe	**Distance moyenne de la cible** (Tâche de *mapping*)
ACE (Lille)	22,3
ACE RRS (Lille)	24,4
ACE sans Estimation RRS (Marseille)	26,6
Contrôle (Lille)	28
Contrôle RRS (Lille)	26,6

ns

*

Tableau 4. Distance moyenne à la tâche de *mapping* en fonction du groupe et comparaison significative

4. Discussion

La progression ACE est une progression innovante dans l'enseignement des mathématiques du CP. Elle tient compte des apports expérimentaux de la psychologique cognitive du développement, des sciences de l'éducation et de la didactique des mathématiques. L'une de ses principales innovations réside dans l'intégration d'un entraînement hebdomadaire à l'estimation numérique, supposée améliorer le « sens du nombre » et la représentation des nombres. Ce type de compétence est reconnu dans la littérature comme fortement lié à la réussite mathématique ultérieure puisqu'il permet de construire des apprentissages solides pourvus de signification.

L'objectif de cette étude était d'évaluer les effets de cette progression sur les performances mathématiques en fin d'année de CP mais surtout de tenter de dégager l'intérêt spécifique de l'entraînement à l'estimation.

Les résultats révèlent des effets bénéfiques de la progression ACE sur les performances mathématiques des élèves en fin de CP. En effet, alors qu'il n'y a pas de différence entre les élèves des classes expérimentales et témoins au début de l'année, les performances des classes expérimentales qui ont suivi la progression ACE en fin d'année sont significativement supérieures à celles des classes témoins qui ont suivi les méthodes habituelles (« Cap Math », « Ermel », ...). Les capacités de *mapping* entre représentations sont également améliorées pour les participants du groupe ACE. Ces résultats sont en accord avec les données issues de la littérature (Hyde et al., 2014 ; Obersteiner, Reiss et Ufer, 2013 ; Park et Brannon, 2013 ; Siegler et Ramani, 2008 ; Wilson, Dehaene, Dubois et Fayol, 2006). Un entraînement spécifiquement basé sur la mise en correspondance entre les représentations permet d'améliorer les habiletés mathématiques symboliques et exactes. De même, cela permet d'améliorer l'acuité numérique. Toutefois, aucune étude à notre connaissance n'avait injectée ce type d'entraînement dans le programme scolaire mathématique en CP. Nos résultats indiquent que ce type d'entraînement est pertinent et peut se mettre en oeuvre en classe de CP. Bien entendu, les activités d'estimation ne font pas tout et on ne peut nier l'importance des autres activités numériques présentes dans la progression ACE.

Les élèves des classes ACE scolarisés en milieu RRS obtiennent des performances mathématiques en fin d'année qui sont supérieures à celles des élèves du groupe témoin scolarisé en milieu ordinaire. Ainsi, la progression ACE et l'entraînement à l'estimation permettent de réduire les écarts liés aux inégalités socio-économiques. Etant donné le poids non négligeable de ces inégalités en début de scolarisation (au niveau des compétences et de l'accès aux moyens comme les jeux de plateaux), ce résultat a des implications très importantes (Ramani et Siegler, 2008 ; 2009).

Enfin, le niveau d'expérience des enseignants ACE est une variable à considérer puisque les performances des élèves dont les enseignants mettent en oeuvre la progression pour la seconde année consécutive sont meilleures, tout au moins lorsqu'il s'agit d'élèves scolarisés en milieu RRS.

Cette recherche permet de développer plusieurs constats que nous allons détailler successivement.

4.1. Dédramatiser l'enseignement des mathématiques

Le premier constat est que les professeurs sont souvent mal à l'aise pour enseigner les mathématiques, comparativement à l'apprentissage de la lecture ou de l'écriture par exemple. Il semble qu'ils se sentent moins compétents, ou plus en difficulté dans ce domaine que dans les autres. Comme nous l'avons vu plus haut, plusieurs programmes ou manuels existent et permettent de guider les enseignants et de les rassurer. Toutefois, nos résultats montrent que les manuels et progressions habituellement utilisés ne permettent pas de développer au mieux les compétences mathématiques des élèves. En effet, comparativement aux classes qui suivent ces méthodes, les élèves progressent davantage avec la méthode ACE. Ces méthodes, bien que respectant les instructions officielles de 2008, sont basées pour la plupart sur des principes d'enseignement qui ne tiennent pas (ou peu) compte des avancées de la recherche. Il n'existe que peu de méthodes qui prennent en compte les résultats des recherches menées en psychologie du développement ou en sciences de l'éducation. Les apports principaux de la progression ACE sont la pratique répétée du calcul mental, un travail intense de composition/décomposition des petits nombres pour un transfert de procédures aux grands nombres, la pratique du recodage sémantique en situation de résolution de problèmes et la familiarisation avec les différents systèmes de représentations et leur mise en correspondance par l'intermédiaire de l'estimation. L'ensemble de ces éléments, appuyés par des résultats scientifiques, contribue aux différences de performances mathématiques observées dans notre étude. Les élèves sont à la fois acteurs et chercheurs de leurs apprentissages (tout comme les enseignants) et bénéficient d'un enseignement complet et en lien avec leurs possibilités et leur fonctionnement.

Certains de ces éléments sont toutefois à nuancer. La progression ACE présente à la fois l'avantage et le biais de mettre l'accent sur l'enseignement des mathématiques. D'autres programmes de recherche se sont attachés à l'enseignement de la lecture par exemple mais il n'en existe pas de spécifique aux mathématiques, ce qui rend cette recherche novatrice. Néanmoins, en mettant l'accent sur les mathématiques, on provoque forcément un investissement différent de la part des enseignants. Ces derniers rapportent d'ailleurs qu'ils passent plus de temps à faire des mathématiques en classe que ce qu'ils font habituellement au CP. Il semblerait donc que les enseignants ACE passent plus de temps à faire des mathématiques en classe et passent également plus de temps à préparer les séances en amont. Il convient donc de relativiser les résultats obtenus par une différence possible dans les durées d'enseignement de la matière et dans l'implication des enseignants. Toutefois, quand on s'intéresse aux enseignants qui utilisent la progression ACE pour la $2^{ème}$ année consécutive, on constate des effets encore plus importants sur les performances en fin d'année. Ainsi, même avec une diminution de l'engouement et de l'investissement après la $1^{ère}$ année de réalisation, les enseignants (sans doute plus à l'aise et avec une représentation complète sur l'année de la progression) réussissent encore à améliorer les performances de leurs élèves.

4.2. Réduire les inégalités socio-économiques

Le second constat est qu'il est possible de réduire les écarts de performances entre les élèves selon leur rattachement ou non à une zone d'éducation prioritaire. Nos résultats montrent que les élèves scolarisés en milieu RRS qui ont bénéficié d'un enseignement basé sur ACE ont de meilleures performances en fin d'année que le groupe témoin équivalent. De plus, en fin d'année, ces élèves atteignent le niveau des élèves témoins scolarisés en milieu ordinaire. Il est donc possible, avec un enseignement différent de réduire les inégalités liées aux différences socio-économiques des familles et des zones d'éducation. A quoi ce résultat peut-il être lié ?

Plusieurs éléments de discussion peuvent être apportés. Les élèves ACE issus d'écoles RRS réalisent un programme basé sur les connaissances en psychologie du développement sur les habiletés numériques chez les enfants. Ce programme est donc adapté aux compétences des élèves et à leurs possibilités d'évolution. L'enseignement ACE est véritablement axé sur la compréhension et l'intégration des différentes représentations numériques dans l'apprentissage des nombres et du calcul. On peut émettre l'hypothèse qu'il permet une meilleure compréhension des concepts et des stratégies de résolutions des calculs. Les enseignants prennent plus de temps pour automatiser les savoirs de base afin de faciliter un transfert sur les savoirs plus complexes (notamment en taille des nombres). De plus, les élèves sont acteurs et chercheurs de leurs propres savoirs par l'intermédiaire de situations stimulantes et valorisantes. Enfin, par la pratique d'activités ritualisées et évolutives, les élèves peuvent se centrer uniquement sur le développement de leurs compétences, sans que la compréhension de la situation viennent parasiter ce dernier. Tous les élèves peuvent se trouver en situation de réussite grâce à une différenciation sur plusieurs activités. Nous pensons que l'ensemble de ces paramètres peut jouer un rôle dans l'amélioration des habiletés mathématiques en fin d'année de CP chez les élèves ACE.

La réduction des inégalités est un argument fort en faveur de la progression ACE puisque c'est un des objectifs essentiel visé par le Ministère de l'Education National aux vues des résultats des évaluations nationales et internationales (IVQ, 2011 ; PISA, 2013). Nous continuons actuellement d'optimiser la progression ACE dans ce sens.

Reste à savoir à quel point cette réduction des inégalités perdure dans le temps. Est-il nécessaire pour ces élèves de suivre tout au long de la scolarité primaire une progression mathématique de ce type ? Quels sont les effets à moyen terme de cette progression en terme de compétences ? Est-ce que cela se fait au détriment d'autres matières pour les élèves scolarisés en milieu défavorisé ? Il serait réellement intéressant d'observer à quel point ces effets s'avèrent bénéfiques à long terme, ou quels sont les changements que cela provoque chez les élèves au niveau de leur attitude générale d'apprenant. Une hypothèse serait que les élèves sont plus impliqués dans les apprentissages, et qu'ils conservent une attitude générale de recherche, et de questionnements que ce qui est enseigné.

4.3. L’expertise de l’enseignant et la connaissance de ce qu’il enseigne

Le troisième constat concerne le niveau d’expérience des enseignants et la connaissance de ce qu’il enseigne. Nous avons constaté que la majorité des enseignants ne sont pas à l’aise dans l’enseignement des mathématiques. L’image controversée de la discipline se retrouve également au niveau de ceux qui l’enseignent en primaire. Avec la progression ACE, les enseignants suivent une formation intensive sur les grands principes de la méthode. Ainsi, ils connaissent les principes théoriques sous-jacents. Régulièrement, des réunions sont organisées entre les enseignants pour parler des difficultés, trouver des solutions ou des stratégies. Ces réunions et la cohésion entre les enseignants qui en découle participe également de manière conséquente aux effets observés sur les performances mathématiques des élèves. Ces échanges s’avèrent précieux et primordiaux, ils sont une des forces de la progression ACE.

La connaissance de ce qui est enseigné augmente avec les années de pratique de la méthode. Nos résultats indiquent un effet différencié de la progression ACE selon les années d’utilisation de la méthode. Par l’intermédiaire d’un questionnaire, nous avons pu constater que la mise en oeuvre de la progression ACE avait radicalement changé leur façon de concevoir l’enseignement des mathématiques. Ils décrivent avoir des éléments théoriques et pratiques qui leur permettent de comprendre ce qu’ils enseignent, pourquoi ils l’enseignent, et comment l’enseigner. De fait, les enseignants qui ont mis en oeuvre deux années consécutives la progression se sentent davantage compétents et appréhendent mieux la progression. Ils comprennent sans doute mieux les objectifs des différentes activités et se sentent plus à l’aise dans leur mise en oeuvre. C’est la combinaison de tous ces paramètres qui permet vraisemblablement aussi d’optimiser les effets de la progression ACE et d’améliorer encore les performances des élèves. L’impact de la progression sur les enseignants fait actuellement l’objet d’investigations plus approfondies.

4.4. Faut-il instaurer un entraînement systématique à l’estimation numérique en classe de CP ?

Dans la seconde partie de l’analyse, nous avons pris en compte les participants du groupe expérimental qui ont bénéficié de la progression ACE sans réaliser l’entraînement à l’estimation. Lors du pré-test, nous avons constaté que le groupe qui a réalisé la progression ACE sans les activités d’estimation avait de meilleures performances en mathématiques. Au post-test, les résultats indiquent que dans le groupe ACE avec Estimation, les performances mathématiques en fin d’année sont significativement supérieures à celles du groupe ACE sans estimation d’abord puis à celles du groupe contrôle. Ainsi, la mise en correspondance entre les représentations par l'intermédiaire des activités sur l'"Estimateur" semble importante et pertinente pour l'acquisition des compétences numériques. Cet effet est d'autant plus important que le groupe expérimental qui a bénéficié de la progression avec les activités d'estimation avait un niveau en mathématique initialement plus faible que l'autre groupe.

Le groupe expérimental ACE avec Estimation et scolarisé en milieu RRS a des performances en mathématiques similaires à celles du groupe témoin tandis que le groupe expérimental ACE sans estimation a des performances légèrement inférieures. Ainsi, l'entraînement hebdomadaire à l'estimation participerait également à la réduction des effets liés aux inégalités socio-économiques. Ces résultats sont donc des arguments en faveur de l'intérêt de l'entraînement à l'estimation pour l'acquisition des compétences et pour la réduction des inégalités. Cette activité pourrait être un moyen de se rapprocher de l'égalité des chances à l'école élémentaire au niveau de l'enseignement des mathématiques.

Nous avons vu en introduction que les capacités de mises en relation des différentes représentations, ainsi que les habiletés d'estimation numérique, sont en lien avec les performances mathématiques ultérieures. Pour la plupart des auteurs, l'aspect sémantique du nombre est contenu dans le code analogique et sa connexion avec le nombre oral ou écrit permet d'en améliorer la compréhension et la représentation. Ainsi, par l'intermédiaire de l'estimation, la mise en correspondance permet de redonner du sens aux nombres et aux calculs en parallèle des autres apprentissages. Cet entraînement systématique permet de soutenir les apprentissages formels et de mieux les ancrer.

Hyde, Khanum et Spelke (2014) ont montré un effet bénéfique d'un bref entraînement à l'approximation non-symbolique sur les performances en arithmétique exacte et symbolique chez les enfants de 6-7 ans. Toutefois, leur entraînement est basé essentiellement sur la représentation analogique tandis que nous sollicitons la mise en correspondance entre les représentations, ce qui nécessite l'activation de l'ANS. Nous pensons qu'un tel entraînement est important mais ne suffit pas pour donner du sens aux symboles numériques et aux calculs. Il paraît important, au long des apprentissages de mettre en lien les symboles et les grandeurs de manière systématique, afin de développer leurs représentations conjointement aux autres acquisitions.

L'objectif de notre recherche n'était pas de montrer que cet entraînement est l'outil pédagogique indispensable aux apprentissages numériques mais plutôt qu'il est un outil nécessaire, bien que non suffisant à lui seul pour développer les compétences mathématiques. Nos résultats sont en faveur de cette hypothèse puisque la progression ACE complète (i.e. avec les activités d'estimation) permet une augmentation significativement plus importante des performances en fin d'année de CP comparativement à un enseignement dénué de ces activités. Toutefois, la réalisation de ces activités n'est évidemment pas suffisante pour apprendre les concepts et la résolution de problèmes ; mais elle permet d'en améliorer la compréhension et le sens. C'est d'ailleurs également la pratique des activités de dénombrement et de calcul qui viennent, à leur tour, renforcer les habiletés d'estimation numérique (Booth et Siegler, 2004 ; Siegler et Opfer, 2003 ; Vilette, 2008). En revanche, l'intégration de ces activités dans le programme d'enseignement semble pertinente et judicieuse, notamment au CP où l'écrit numérique commence à prendre une place prépondérante et doit être rattaché à son analogue non-symbolique pour être compris. Le CP est une année charnière où les apprentissages numériques de bases sont réalisés et où les trois types de représentations doivent être mises en relation. L'utilisation d'un outil comme l'"Estimateur" pour solliciter la mise en correspondance de ces représentations et redonner du sens aux mathématiques semble faire ses preuves ici. Les situations stimulantes et progressives qui y sont proposées permettent un apprentissage progressif et individualisé qui reste motivant pour les élèves. Ces résultats ont fait l'objet d'une communication orale au 28ème Congrès International de Psychologie Appliquée (ICAP) en juillet 2014.

Etant donné les implications fortes de ce type d'entraînement auprès des élèves scolarisés en milieu RRS, et donc plutôt défavorisés, on peut aisément émettre l'hypothèse de l'intérêt de cet outil pour limiter le décrochage scolaire des élèves. Cette question fait actuellement l'objet de nouvelles recherches.

Enfin, des analyses antérieures réalisées lors de la première année de mise en oeuvre apportent un résultat supplémentaire. La précision des estimations (indicateur important de la représentation des nombres) est meilleure pour le groupe qui a réalisé la progression ACE complète par rapport au groupe contrôle. Il n'y a pas de différence en fonction du milieu de scolarisation. De plus, les participants du groupe expérimental sans Estimation et scolarisés en milieu RRS sont significativement moins précis dans leurs estimations que ceux du groupe expérimental avec Estimation en milieu RRS. En effet, le groupe sans Estimation est aussi précis que le groupe contrôle. Ce type d'entraînement semble donc tout à fait pertinent pour améliorer la représentation des nombres chez les enfants scolarisés en milieu RRS.

5. Conclusion

Au final, l'ensemble de nos résultats tend à montrer qu'une pratique régulière de la mise en correspondance entre représentations durant l'année de CP est importante pour la réussite des apprentissages mathématiques élémentaires. De plus, ce type d'entraînement semble aider les élèves dont le niveau socio-culturel est plus défavorisé.

Nys, Ventura, Fernandes, Querido, Leybaert et Content (2013) ont montré que la scolarisation et les apprentissages numériques exacts jouent un rôle dans l'augmentation de la précision de l'ANS. Ainsi, les apprentissages exacts et symboliques habituellement réalisés permettraient déjà d'améliorer l'acuité du « sens du nombre ». Notre étude montre toutefois qu'il est possible, en ajoutant des activités sollicitant l'ANS d'améliorer encore davantage cette acuité.

C'est entre autre la sollicitation répétée et constante de l'ANS par une activité de mise en correspondance entre les représentations qui participe à l'amélioration des compétences arithmétiques en fin d'année. Si cet entraînement n'est pas nécessairement indispensable ni suffisant, nous défendons l'idée qu'il devrait être intégré dans les progressions mathématiques car il permet de donner du sens aux nombres et aux calculs, notamment pour les enfants scolarisés en milieu défavorisés.

Il serait néanmoins nécessaire d'étudier les effets seuls des activités d'entraînement à l'estimation numérique en CP comparativement aux effets de la progression ACE. Cela permettrait de préciser si l'instauration systématique de telles activités permet déjà, à elle seule, d'améliorer les compétences en mathématiques ou si les résultats sont dépendants de la coordination de l'ensemble des activités de la progression ACE. De même, nous pourrions à l'avenir utiliser une autre tâche de *mapping* en post-test comme par exemple une tâche de *matching-to-sample* qui permettrait de s'assurer que les effets sont liés aux processus et non à l'activité en elle-même. Toutefois, l'épreuve utilisée actuellement est différente de ce qui est réalisé dans la progression puisqu'il s'agit d'un *mapping* à choix.

Les travaux présentés jusqu'ici ont porté sur des enfants tout-venant de CP. Mais qu'en est-il pour les enfants au développement atypique ? Nous avons évoqué rapidement la place du langage dans les apprentissages mathématiques. Que se passe-t-il auprès d'enfants dont les capacités langagières sont déficitaires ? On peut supposer que les méthodes d'apprentissages classiques, basées sur les représentations exactes et symboliques des nombres ne permettent pas aux enfants d’atteindre un niveau de connaissances suffisant. Est-ce qu’un entraînement basé sur les codes non-symboliques et analogiques, et notamment sur leur mise en correspondance avec les symboles, serait pertinent auprès de ces enfants ? Dans la troisième partie, nous adaptons et proposons ce dispositif pour des enfants porteurs de la trisomie 21, dont le développement numérique et langagier est particulièrement déficitaire.

TROISIEME PARTIE

Remédiation des troubles numériques basée sur le *mapping* entre les représentations : intérêts et application chez les enfants porteurs du syndrome de Down

Dans la partie précédente, nous avons étudié la place du système analogique et de la mise en correspondance entre les représentations (*mapping*) dans l'éducation scolaire des enfants typiques en Cours Préparatoire. Nous avons montré qu'il était pertinent et nécessaire, bien que non suffisant, d'inclure dans les programmes d'apprentissage mathématique des objectifs liés à l'acquisition du sens des nombres par les activités d'estimation et de *mapping*.

Dans la prise en charge des troubles spécifiques des apprentissages numériques, ces aspects sont relativement bien étudiés et documentés (Thevenot et Masson, 2013 ; Vilette, Mawart et Rusinek, 2010 ; Wilson et Dehaene, 2009). En effet, dans ce cas précis, les programmes de remédiation se développent avec des entraînements basés sur cette mise en correspondance et sur l'acquisition du sens des nombres. Toutefois, ce n'est pas vraiment le cas dans les pathologies d'origine génétique (syndrome de Williams, trisomie 21) où les habiletés numériques sont pourtant déficitaires et les capacités langagières perturbées. Ainsi, dans la suite de nos travaux, nous nous intéresserons à la remédiation des troubles numériques dans le syndrome génétique le plus répandu : la trisomie 21. Dans cette pathologie, le numérique et le langagier sont déficitaires tandis que le visuo-spatial est relativement préservé. S'intéresser à cette population présente un intérêt majeur pour notre problématique.

En effet, cela nous permettra, dans un premier temps, de mieux cerner l'efficience des systèmes numériques approximatif et exact lorsque le langage est déficitaire. De plus, il nous semble opportun de proposer une autre manière de remédier aux difficultés numériques auprès de cette population qui présentent également d'autres difficultés cognitives, afin d'améliorer sensiblement leur adaptation et autonomie. *A posteriori*, cela permettrait également de mieux comprendre comment le langage peut influencer les constructions numériques chez l'enfant.

Dans un premier chapitre et après une brève présentation de ce syndrome, nous détaillerons le profil cognitif des personnes porteuses de la trisomie 21, particulièrement au niveau des habiletés numériques. Puis, nous évoquerons les remédiations déjà existantes auprès de cette population et nous verrons qu'elles sont principalement de deux types : sensorielle ou « sémantique » (i.e. basée sur le sens des nombres). Enfin, dans le chapitre suivant, nous exposerons deux recherches que nous avons réalisé auprès de cette population : une étude sur les compétences de *mapping* et une étude d'apprentissage.

Chapitre 6

Profil cognitif des personnes atteintes de trisomie 21 et remédiations

1. La trisomie 21 ou syndrome de Down

La trisomie 21 (T21) est l'une des principales causes de la déficience intellectuelle (Kittler, Krinsky-McHale et Devenny, 2008) et la plus fréquente des anomalies chromosomiques. Il s'agit d'un type particulier de trisomie où les personnes ont 47 chromosomes au lieu des 46 habituellement présents, avec 3 chromosomes 21 au lieu de 2. Le mécanisme sous-jacent est un accident mécanique lors de la division cellulaire des chromosomes. Selon la cause de l'anomalie génétique, la forme de la trisomie est différente : trisomie libre (96 % des cas), en mosaïque (2%) ou par translocation (2%). Plusieurs facteurs de risques sont envisagés, comme la maternité tardive, mais il n'est pas possible de connaître précisément la cause de ce syndrome.

Avec une prévalence d'un cas pour environ 1000 à 1500 naissances (Bee et Boyd, 2008 ; Comblain et Thibault, 2009), le risque d'avoir un enfant atteint de trisomie 21 augmente avec l'âge des parents mais reste malgré tout stable. Actuellement, il y aurait
50 000 personnes avec trisomie 21 en France (site du Caducée). Les traitements sont destinés seulement à prévenir ou diminuer certains symptômes. Néanmoins, les personnes atteintes de ce syndrome voient leur espérance de vie augmenter.

Trois formes de trisomie 21 sont identifiées :

- « La forme libre », la plus fréquente, où un chromosome supplémentaire est présent dans chaque cellule de l'embryon ;
- « La forme mosaïque » où les cellules avec et sans trisomie coexistent ;
- « La forme translocation » résultant de la translocation d'une partie d'un chromosome 21 sur un autre chromosome.

Les symptômes typiques sont : une morphologie particulière, des malformations d'organes et articulaires, et des retards mentaux plus ou moins importants entravant l'inclusion sociale. Même s'il existe une importante variabilité interindividuelle, toutes les personnes sont atteintes d'une déficience intellectuelle plus ou moins sévère, avec un Quotient Intellectuel moyen de 50. L'intégration sociale est donc très difficile, même si ces personnes sont décrites comme sociables et amicales.

Comme tout autre syndrome génétique, le développement se fait de manière atypique comparativement au développement des enfants tout-venant puisque, dès l'embryogénèse, une multitude de répercussions au niveau cérébral, biochimique et électro-physiologique s'enchaînent. De ce fait, les difficultés ne peuvent pas être considérées comme similaires à celles présentées par des patients adultes cérébro-lésés par exemple, qui ont bénéficié d'un développement typique. Ainsi, certains chercheurs préfèrent désormais analyser le développement atypique en fonction du syndrome ou du trouble, afin d'affiner la description du profil en utilisant des méthodes comme l'analyse des trajectoires individuelles. Néanmoins, pour notre propos, et étant donné l'intérêt général de la thèse, nous resterons dans une analyse classique des difficultés présentées par les enfants T21. L'analyse de ces résultats en terme de trajectoires individuelles fait actuellement l'objet de l'écriture d'un article.

2. Profil cognitif

D'une manière générale, tous les enfants atteints de trisomie 21 présentent des troubles d'apprentissage mais la sévérité est variable en fonction des individus. La plupart du temps, les compétences scolaires sont peu ou ne sont pas du tout enseignées chez ces enfants, au profit de compétences plus pragmatiques telles que l'autonomie, la socialisation, le langage, etc.

Dans ce syndrome, le domaine verbal est une faiblesse. Par comparaison avec des enfants atteints du syndrome de Williams, les compétences langagières des personnes T21 sont inférieures dans quasiment tous les domaines à l'exception du langage pragmatique (Rondal, 2001 ; Wang et Bellugi, 1993). Le versant auditif de la mémoire à court-terme semble également perturbé, avec un empan de chiffres qui n'évolue pas ou peu avec l'âge chronologique (Comblain, 2001). Ces différents constats justifieraient de ne pas baser les apprentissages des personnes T21 uniquement sur la modalité verbale que ce soit à l'oral ou à l'écrit.

Le domaine visuo-spatial est, en revanche, relativement bien préservé (Bellugi, Lichtenberger, Mills, Galaburda et Korenberg, 1999 ; Brown, Johnson, Paterson, Gilmore, Longhi et Karmiloff-Smith, 2003 ; Dykens, Hodapp et Finucane, 2000 ; Klein et Mervis, 1999). Des difficultés existent au niveau des détails internes aux représentations visuo-spatiales mais l'organisation globale est sauvegardée (Bellugi et al., 1999 ; Paterson, 2001) comparativement aux personnes atteintes du syndrome de Williams. Les implications pédagogiques sont très fortes : il apparaît judicieux d'utiliser ce point fort avec les personnes T21 dans les remédiations qui sont envisagées.

Au niveau numérique, le déficit est plutôt sévère chez les personnes T21 (Brigstocke, Hulme et Nye, 2008) et ce à différents niveaux : habiletés arithmétiques, comptage, ou connaissances mathématique (Buckley et Sachs, 1987 ; Carr, 1988 ; Gelman et Cohen, 1988 ; Nye, Fluck et Buckley, 2001 ; Porter, 1999). Les progrès sont possibles mais faibles et lents. Des études ont montré que la plupart des adolescents et des adultes n'atteignent pas le niveau attendu sur les compétences de base de la numération (Bochner, Outhred, Pieterse et Bashash, 2003 ; Shepperdson, 1994).

Dans la littérature concernant le profil cognitif et les possibilités rééducatives ou compensatoires des T21, l'enjeu majeur est de savoir si leur développement intellectuel est typique mais ralenti ou s'il est réellement « déviant » (Lewis, 1997 cité par Nye et al., 1995). De même, on s'interroge sur une spécificité du déficit en mathématiques ou sur les répercussions d'un faible niveau d'intelligence général. Les questions sont semblables dans le domaine numérique : les difficultés correspondent-elles à un simple retard de développement ou sont-elles issues d'un traitement numérique atypique et déficitaire ? Pour éclairer au mieux notre propos, nous allons maintenant décrire les habiletés numériques des enfants porteurs de la trisomie 21. Comme nous allons le voir, la variabilité inter-individuelle est importante.

2.1. Numération, comptage et calcul

Cornwell, en 1974, montrait que les enfants T21 ne développaient pas de compréhension des concepts arithmétiques mais utilisaient des procédures apprises par cœur.

Dans la littérature, il est généralement établi que ces personnes présentent des difficultés dans la numération, et que ces dernières seraient liées à leur niveau cognitif général (Caycho, Gunn et Siegal, 1991 ; Paterson, Girelli, Butterworth et Karmiloff-Smith, 2006). Plus précisément, l'apprentissage de la comptine numérique est difficile, et ce probablement à cause des difficultés verbales (Faragher et Clark, 2013 ; Paterson et al. 2006). De même, le lexique numérique est plutôt pauvre (Nye, Fluck et Buckley, 2001). En effet, la longueur de la séquence numérique lors d'une tâche de comptage procédurale est plus courte comparativement aux enfants tous venants appariés sur l'âge mental (médiane à 2 nombres contre 11 pour les typiques). A 5 ans, ils sont 50% à ne pas maitriser la suite des nombres au-delà de 3 (Nye et al., 2001). L'apport d'une aide parentale lors de cette tâche permet un allongement de la séquence dans les deux groupes mais pas pour tous les enfants.

Quelles sont les compétences de dénombrement et de comptage des personnes atteintes de trisomie 21 ? Nous allons voir que les études ne s'accordent pas toujours sur la description précise de leurs habiletés et difficultés.

Une étude réalisée auprès de 46 adolescents trisomiques de 11 à 20 ans montre qu'ils sont moins de 25% à réussir à dénombrer jusqu'à 20 objets (Buckley, 2001 ; 2002). Dans une étude réalisée en 1992, Bird et Buckley demandaient à des enfants trisomiques de 3 à 12 ans de compter jusqu'à 10 objets. Leurs résultats indiquent que les enfants de 3 à 6 ans sont 42% à réussir à dénombrer jusqu'à 10 objets tandis qu'ils sont 80% à réussir chez les enfants de 7 à 12 ans. Il semblerait donc que les enfants T21 soient en mesure de dénombrer des collections inférieures à 20 objets mais que leurs performances varient avec l'âge, et probablement avec l'expérience et la familiarisation avec ce type de tâche.

En ce qui concerne l'acquisition des principes de comptages de Gelman, là encore les études ne s'accordent pas puisque certaines concluent à une spécificité dans leur développement (Gelman et Cohen, 1988 ; Nye et al., 1999 ; Nye et al. ; 2001 ; Porter, 1999), et d'autres à un apprentissage identique (Bashash, Outhred and Bochner ; 2003 ; Caycho, Gunn et Siegal, 1991). Pour Caycho et ses collaborateurs, les enfants T21 qui sont en mesure d'utiliser les principes de comptage seraient en difficultés à cause d'un déficit au niveau du langage réceptif, et non à cause de leur syndrome. Les auteurs ne retrouvent pas de différence entre un groupe d'enfants T21 et un groupe d'enfants typiques apparié sur les capacités en vocabulaire réceptif. Dans l'étude de Porter (1999), des enfants trisomiques d'âge moyen de 10 ans maîtrisent moins le principe d'ordre stable que le groupe contrôle mais réussissent mieux la correspondance terme à terme. L'auteur conclut à une difficulté spécifique au niveau de la mémoire auditive séquentielle mais à un effet favorable des approches visuelles des nombres. Nye, Fluck et Buckley (2001) précisent légèrement ce résultat puisqu'ils révèlent, chez les enfants T21, une compréhension conceptuelle de la cardinalité similaire aux tout-venants, mais avec d'importantes erreurs procédurales dans le comptage. Pour l'addition, Irwin (1991) montre que les enfants T21 peuvent sur-compter à partir du plus grand terme, après apprentissage avec une technique d'enseignement spécifique. Ainsi, en ce qui concerne le comptage et ses principes, il semble difficile aujourd'hui de savoir s'il s'agit d'habiletés préservées ou déficitaires chez les personnes atteintes de trisomie.

Enfin, au niveau des compétences de calcul, l'étude de Bird et Buckley (1994) montre que les enfants trisomiques de 3 à 6 ans sont 33% à avoir acquis quelques compétences additives et soustractives tandis qu'ils sont 80% de 7 à 12 ans. Toutefois, il semblerait que les compétences de calcul soient rarement abouties et constituent une difficulté majeure dans cette population. De plus, cela est amplifié par le fait que les mathématiques formelles ne sont pas enseignées au profit d'activités numériques plus écologiques comme la gestion de l'argent.

2.2. *Subitizing*

Comme nous l'avons défini dans la première partie de la thèse, le subitizing est une « appréhension quasi-instantanée du nombre » (J.-P. Fischer in Bideaud, Meljac et Fischer, 1991, p.235) pour les quantités allant jusque 4. Il serait un pré-requis au comptage. Dans la trisomie 21, Paterson, Girelli, Butterworth et Karmiloff-Smith (2006) ont montré que les enfants atteints de ce syndrome ne réussiraient pas à distinguer deux et trois objets à 30 mois, comparativement aux enfants typiques de même âge. Selon d'autres études, cette discrimination serait réussie dès l'âge de 5 mois (Starkley et Cooper, 1980), voire entre 1 à 3 jours de vie (Antell et Keating, 1983). Sella, Lanfranchi et Zorzi (2013) retrouvent des résultats concordants avec un déficit de performances quand il s'agit d'apparier deux quantités identiques impliquant le processus de subitizing, et ce même en comparaison avec un groupe apparié sur l'âge mental. Dans cette étude, les enfants T21 réalisent une tâche d'appariement où ils doivent associer la quantité correspondante à la cible parmi deux distracteurs sur ordinateur. Les performances montrent que leur précision diminue à mesure que la taille des nombres augmente, indiquant un effet de ratio dans les items habituellement *subitizés*, et donc l'implication de l'ANS pour dénombrer les petites quantités. En revanche, lorsqu'on apparie les enfants typiques sur l'âge mental et l'âge chronologique, on constate qu'ils semblent utiliser l'Object Tracking System (OTS). Ces résultats sont en accord avec un déficit au niveau de l'OTS guidant le *subitizing* chez les personnes T21. Toutefois, les auteurs montrent également qu'à l'âge de 24 ans, les jeunes T21 et typiques présentent les mêmes performances pour comparer deux quantités (dans et au-delà du champ du subitizing). Il serait donc intéressant de savoir si ce rattrapage dans les capacités de subitizing avec l'âge pour le groupe T21 se fait au niveau de l'activité elle-même ou si elle est une conséquence d'une plus grande rapidité pour compter de petites quantités inférieures à 5. Nous pouvons également envisager que cela soit lié à une amélioration de leurs capacités d'attention soutenue au cours du développement.

Nous avons vu que les capacités de dénombrement et de comptage dans la trisomie 21 peuvent être efficientes dans une certaine mesure. En revanche, les enfants T21 semblent avoir des habiletés déficitaires en *subitizing*. Mais qu'en est-il de leurs performances d'estimation ? Nous aborderons également la question de l'efficience de l'ANS.

2.3. Estimation

Dans une étude, Paterson, Girelli, Butterworth et Karmiloff-Smith (2006) évaluent, chez des enfants de 15 à 30 mois atteints du syndrome génétique de Williams ou de la trisomie 21, les capacités de comparaison de numérosités selon un paradigme d'attention visuelle. Leurs résultats indiquent que les capacités de discrimination des petites quantités chez les enfants T21 est fortement retardée par rapport à celles des enfants Williams. En revanche, à une tâche de comparaison relative de quantités, et chez des adolescents et des adultes, les performances des T21 sont semblables à celles de sujets typiques, révélant une préservation de l'ANS (Paterson, Girelli, Butterworth et Karmiloff-Smith, 2006). Toutefois, lorsqu'il s'agit d'items impliquant le *subitizing*, les capacités d'attention soutenue des enfants T21 semblent faire défaut. L'ensemble de ces éléments indique un retard au niveau d'une composante de traitement numérique de « bas niveau », qui peut se rattraper au cours du développement. Pour ces auteurs, les traitements réalisés par les T21 pour discriminer des grands nombres seraient similaires aux adultes une fois la représentation des petites quantités efficiente. De plus, la comparaison qu'ils réalisent avec le syndrome de Williams permet de montrer qu'il ne serait pas nécessaire d'avoir de meilleures habiletés de langage pour réaliser des tâches de jugements sur la magnitude. Ainsi, le langage ne semble pas indispensable pour acquérir le sens des nombres. Plusieurs auteurs constatent également que les sujets T21 réalisent un balayage visuel global avec de rapides mouvements oculaires, ce qui leur permet de réussir ce type d'épreuve (Brown et al., 2003 ; Karmiloff-Smith, 2009).

Si l'effet de distance (signature de l'ANS) n'est pas retrouvé par Paterson et ses collaborateurs (2006) avant un âge avancé, Camos (2009) l'observe néanmoins chez des enfants T21 âgés de 5 à 8 ans. Ces derniers sont capables de discriminer les quantités dans un rapport de 1 à 2 (16 versus 8) mais pas dans un rapport de 2 à 3 (12 versus 8). Pour Camos, il n'y a pas de différence entre les enfants T21 et les enfants au développement typique, et une amélioration des capacités de discrimination des quantités avec l'âge est observée dans les deux populations. Ces résultats amènent les chercheurs à envisager les difficultés mathématiques dans la trisomie non pas comme des difficultés sur les fondements du nombre (l'ANS), mais plutôt comme une conséquence des apprentissages basés sur le langage, point particulièrement faible chez les T21.

Ainsi, les résultats des études concernant l'ANS sont contradictoires. Sella, Lanfranchi et Zorzi (2013) ont demandé à des enfants typiques et T21 de réaliser une tâche de *matching* entre un nombre arabe écrit et une quantité parmi deux distracteurs. Les résultats indiquent une préservation de l'ANS avec un effet de ratio typique dans cette tâche. Bien que leurs performances soient moins précises que les enfants appariés sur l'âge chronologique, il n'y a pas de différence comparativement au groupe apparié sur l'âge mental. Ainsi, il y aurait un retard développemental dans l'acuité de l'ANS chez les enfants T21 par rapport aux typiques du même âge chronologique. D'après les auteurs, ce résultat pourrait expliquer les troubles du nombre et du calcul que présentent les personnes atteintes de trisomie 21.

Bellachi et ses collaborateurs (2014) ont mené une étude sur l'addition approximative et la mémoire de travail dans la trisomie 21. Ils partent du principe que l'implication de la mémoire de travail lors d'une tâche de calcul symbolique approximatif ou d'additions approximatives de quantités est indéniable (Caviola, Mammarella, Cornoldi et Lucangelli, 2012 ; Mammarella, Borella, Pastore et Pazzaglia, 2013). De ce fait, leur hypothèse est qu'une même partie de la mémoire de travail pourrait être impliquée dans ces deux tâches. Etant donné la faiblesse de cette composante dans la trisomie 21 ; notamment au niveau de la MDT verbale (Belacchi, Passolonghi, Brentan et al., 2014), les auteurs ont analysé les performances à différentes tâches numériques et leurs liens avec la mémoire de travail chez des enfants typiques et T21. L'objectif principal de cette étude était de mettre en lumière l'implication de la mémoire de travail dans la composante non-symbolique des nombres. Leurs résultats indiquent que les enfants T21 réussissent moins bien que le groupe contrôle à estimer la numérosité d'un ensemble, mais qu'ils ne présentent pas ces difficultés quand il s'agit d'en additionner plusieurs. Cela indiquerait une relative indépendance entre ces deux tâches. Au niveau de la mémoire de travail, les résultats confirment des difficultés au niveau de la MDT verbale mais non au niveau de la MDT visuo-spatiale. Ils observent également un effet médiateur de la MDT visuo-spatiale sur les performances en addition approximative dans la trisomie 21.

Même si toutes les études ne s'accordent pas sur cette conclusion, il semblerait que les personnes atteintes de trisomie 21 ne présentent pas de déficit primaire en mathématique, puisque le sens des nombres et du calcul semble être globalement préservé dans ce syndrome. Le trouble numérique proviendrait davantage d'un déficit secondaire lié, soit à l'absence ou à la faiblesse des apprentissages numériques formels, soit à leurs faiblesses au niveau langagier, soit bien entendu, à la combinaison de ces deux hypothèses. Comme nous l'avons vu dans l'étude de Belacchi et ses collaborateurs (2014), une autre hypothèse est à considérer : celle d'un déficit en mémoire de travail verbale. Cette dernière hypothèse est aujourd'hui fortement plébiscitée puisqu'elle permet d'expliquer les performances des T21 dans les connaissances numériques verbales, notamment avec un déficit au niveau de la mémoire auditive séquentielle (Baddeley et Jarrold, 2007). De plus, cela justifierait l'utilisation des représentations numériques visuo-spatiales dans la remédiation des troubles numériques dans cette population. Toutefois, comme nous allons le voir, les programmes actuels sont encore sensiblement basés sur les aspects sensoriels du nombre, bien que, les approches basées sur le sens des nombres prennent progressivement place.

3. Des programmes éducatifs basés sur la modalité sensorielle ou la pédagogie

Les enfants T21 qui ont eu la possibilité d'être scolarisés en milieu ordinaire et qui ont pu recevoir un enseignement approprié en mathématique ont des performances nettement supérieures à leur population non scolarisée en milieu ordinaire (Sloper, Turner, Knussen et Cunningham, 1990 ; Casey, Jones, Kugler et Watkins, 1988 cités par Fischer et Bier, 2005). Et pourtant, il apparaît très difficile de remédier aux difficultés numériques puisque le retard est difficile à combler comparativement aux progrès réalisés en lecture après un enseignement adapté (Buckley, 2001). Si de nombreux programmes ont tenté d'améliorer les compétences numériques des enfants T21 en s'appuyant sur une représentation visuo-spatiale préservée, nous verrons que les récentes découvertes quant à l'efficience du système numérique approximatif tendent à orienter les programmes de remédiation vers un enseignement basé sur le sens des nombres.

3.1. Le programme « Touch Math » (Hanrahan et Newman, 1996)

« Touch Math » est un programme multi-sensoriel qui vise un enseignement numérique symbolique de base. On dispose des points en relief ou non sur les chiffres arabes et l'enfant doit les toucher (cf. Figure 11). Avec l'entraînement, la disposition des points pour chaque chiffre est mémorisée et on peut progressivement les retirer. Jusqu'au nombre 5, ce type de représentation par *touchpoint* permet de mettre en lien les nombres symboliques arabes et leur correspondance analogique. Toutefois, au-delà de 5, la représentation ne correspond plus au code analogique puisque certains points doivent être comptés deux fois.

On demande également aux enfants d'effectuer des additions en utilisant le comptage total ou le surcomptage des différents points, l'objectif étant d'aboutir à une mémorisation des faits additifs.

Figure 11. Représentation des *touchpoint* sur les nombres de 1 à 9 dans le programme « Touch Math » (Henrahan et Newman, 1996).

L'intérêt de cette méthode est qu'on se base sur un aspect visuel et spatial des nombres, format favorable aux apprentissages pour les enfants T21. Avec cette technique, les concepteurs de ce programme mettent en avant une réelle participation des élèves et une réflexion quant aux calculs proposés ; les enfants ne devinent plus et gagnent en satisfaction personnelle.

En 1996, Hanrahan et Newman ont testé ce programme auprès de 4 enfants T21 de 8 à 15 ans en ne travaillant que les *touchpoints* pour les nombres jusqu'à 5. Globalement les enfants ont tous bien progressé. Toutefois, les effets bénéfiques de ce programme étaient très réduits lorsque l'enfant était dans un contexte différent (sur ordinateur, par exemple). Il n'existe pas à notre connaissance d'autres études scientifiques évaluant les effets de la méthode.

3.2. Le programme « Numicon » (Bird et Buckley, 2001 ; 2002)

« Numicon » est un curriculum multi-sensoriel d'enseignement progressif des mathématiques. Initialement destiné aux enfants préscolaires et scolaires typiques, il a néanmoins été testé auprès d'enfants porteurs d'une trisomie 21 étant donné leur point fort dans les représentations visuo-spatiales.

L'objectif affiché par les concepteurs est d'aider à comprendre le concept de nombre et les relations entre les nombres à l'aide de planches à trous. « Numicon » aiderait les enfants à calculer sans compter. Là encore, les sens du toucher et de la vue sont sollicités conjointement, afin d'avoir une représentation visuelle du nombre, sans recours aux nombres arabes écrits. Cette représentation, sous forme de plaquettes à trous de couleurs différentes pour chaque nombre (Figure 12), permettrait de « voir » rapidement les nombres et leurs relations, mobilisant ainsi une image mentale du cardinal. En effet, le nombre suivant est toujours représenté par une plaquette avec un trou de plus que sur le précédent.

Les familles d'enfants T21 ont d'abord utilisé le programme « Numicon » d'eux-mêmes à la maison (Buckley, Horner, Wing et Bird, 2001 ; Nye, Buckley et Bird, 2005 ; Wing et Tacon, 2007), pour attester des progrès de la méthode. Puis, une première étude pilote a été menée auprès de 11 enfants T21 de 8 à 13 ans (Ewan et Mair, 2002) en utilisant la méthode durant 4 mois. Les résultats montrent que les élèves gagnent 5 mois de performances lorsqu'on les évalue avec des batteries standardisées en mathématiques. D'autres études de cas y trouvent le même intérêt (Coleman, 2003 ; Uttley, 2003).

Suite à ces résultats encourageants, une étude a été conduite sur une année complète en utilisant « Numicon » comme méthode d'apprentissage pour développer les performances mathématiques des enfants T21 (Nye, Buckley et Bird, 2005). Seize enfants trisomiques de 5 à 14 ans ont bénéficié d'un apprentissage d'au moins 15 minutes par jour durant une année. Les résultats montrent que les enfants qui ont suivi « Numicon » améliorent non significativement leurs performances de 17% par rapport au groupe contrôle. Bien que la différence non-significative soit expliquée en terme d'échantillon trop petit, nous pouvons également interpréter le bénéfice de 17% simplement par le fait que les mathématiques ont pris une place plus importante dans les apprentissages réalisés chez ces enfants et, ainsi, retentir sur leurs performances par un effet d'implication. Les auteurs ont également indiqué que leur programme devait être adapté aux spécificités de la population. Un livre contenant des indications sur la manière d'adapter

« Numicon » chez les enfants T21 a été écrit par Joanna Nye (2006) mais il n'existe pas réellement à l'heure actuelle d'adaptation connue et validée de la méthode chez les enfants trisomiques 21.

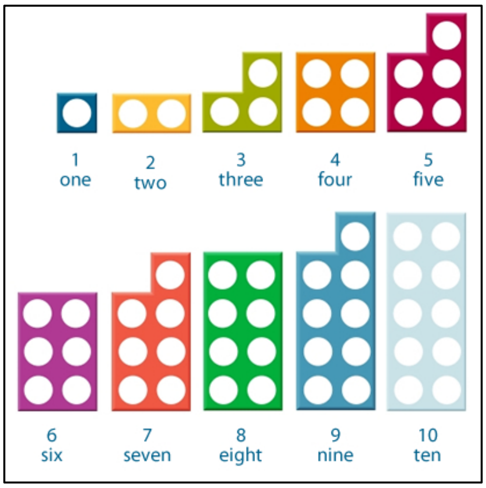


Figure 12. Représentation des nombres de 1 à 10 dans le programme « Numicon » (Bird et Buckley, 2001 ; 2002)

3.3. La méthode « Stern-Math » (Stern et Stern, 1971)

La méthode « Stern-Math » ou « méthode d'arithmétique structurelle », élaborée par Stern & Stern en 1971, utilise également des supports multi-sensoriels. Le postulat de départ est que les personnes en difficulté d'apprentissage - y compris dans les troubles génétiques et intellectuels - ont besoin d'apprendre avec tous les canaux sensoriels possibles. L'objectif est également d'augmenter leur sentiment d'efficacité et leur confiance en soi. Dans cette méthode, l'apprentissage des concepts et leurs relations se fait donc par manipulation de matériel en contexte et par perception sensorielle, mais jamais par mémorisation par cœur ou par comptage. Chaque nombre est représenté, structurellement, par des blocs de longueurs différentes, correspondant à la taille des nombres de 1 à 10 qui prennent place dans une boîte contenant des rainures (Figure 13). Le matériel vise à la perception immédiate de la structure de chaque nombre. Grâce à cette visualisation immédiate selon la longueur, ils peuvent se rendre compte et corriger d'eux-mêmes leurs erreurs. Le langage est utilisé *a minima* au profit de l'expérience visuelle et tactile. De ce fait, le programme est décrit comme très utile pour les personnes avec des difficultés d'apprentissage ou des troubles du langage.

La méthode n'a pas été testée empiriquement auprès d'enfants T21 mais plusieurs études de cas semblent en affirmer les effets bénéfiques (Horner, 2007).

Figure 13. Boîte avec les blocs de 1 à 10 pour la méthode « Stern-Math » (Stern & Stern,1971)

3.4. La méthode « Kumon » (Kumon, 1958)

Cette méthode définit plutôt des principes pédagogiques et ne privilégie pas une modalité sensorielle dans les apprentissages. D'une utilisation parascolaire, elle a pour objectif d'intégrer les notions mathématiques fondamentales en respectant le rythme de chaque élève. Evolutive par paliers successifs et dépendants, l'instruction se fait au quotidien de manière assez intensive. La progression se fait en autonomie, l'élève est ainsi d'emblé placé en situation active de réussite puisque les premières étapes de son apprentissage correspondent à son niveau en mathématique.

Pour chaque type d'apprentissage, on utilise un exemple concret, une image mentale et une généralisation. Et ensuite, la répétition et la fréquence des apprentissages permettent d'installer les notions durablement. Il s'agit d'une approche d'apprentissage par cœur, n'impliquant pas la manipulation concrète.

Il n'y a pas d'études auprès d'enfants T21 mais là encore des études de cas en faveur de ce programme sont disponibles (Buckley, 2007).

3.5. Conclusion sur les programmes (ré) éducatifs

La plupart des méthodes que nous venons de décrire n'ont que très rarement démontré scientifiquement leur intérêt. De plus, la plupart d'entre elles sont des méthodes non spécifiques au syndrome de la trisomie 21 et demandent encore à être adaptées. Les résultats décrits portent presque uniquement sur des études de cas et, étant donné la grande variabilité des profils cognitifs dans cette population, il semble trop ambitieux d'espérer une généralisation des conclusions.

De plus, deux limites majeures doivent être soulignées ici : la première est qu'il s'agit de méthodes d'enseignement longue, coûteuse et nécessitant pour la plupart une formation spécifique. Toutefois, l'atout principal de ces programmes est qu'ils utilisent des représentations sensorielles des nombres, permettant en partie de donner sens aux nombres. Mais cela implique une seconde limite qui est une interrogation quant à la possibilité d'un transfert des savoirs à des supports plus écologiques et « communs ». En effet, si les enfants T21 acquièrent des connaissances grâce aux outils de ces méthodes, il apparaît difficile que ces connaissances soient transférables aux représentations de la vie quotidienne.

Récemment, les questionnements se tournent vers une remédiation des troubles du calcul basée sur une représentation visuo-spatiale des nombres. Ainsi, alors que des effets bénéfiques sont montrés chez les tout-venants et les personnes atteintes de dyscalculie, on s'interroge sur l'intérêt de ce type de représentation dans l'acquisition des habiletés numériques dans le syndrome génétique de Down.

4. Vers des programmes de remédiation basés sur le « sens du nombre » ?

Les critiques adressées aux programmes multi-sensoriels décrits plus haut sont qu'ils ne sont pas suffisamment transférables, puisqu'hors contexte. Les situations concrètes du quotidien peuvent continuer à poser problèmes à ces élèves. De plus, la plupart de ces méthodes ne sont pas réellement adaptées au profil spécifique des enfants T21.

Chazoule, Thevenot et Fayol (2012) ont suivi 14 enfants atteints de trisomie 21 âgés de 7 ans 3 mois à 13 ans (âge moyen= 10 ans ½). Après un premier temps d'évaluation, aucune action n'est réalisée durant 7 semaines, puis un deuxième temps d'évaluation a lieu suivi de 6 semaines d'entraînement et d'une dernière évaluation. A raison d'un jour par semaine et par groupe de 2 à 3 élèves, les enfants ont réalisé des activités telles qu'énoncer la chaîne numérique verbale, constituer des collections, dénombrer des collections dans des configurations variées, apparier des quantités, mettre en correspondance des numérosités, compter et reconnaître des équivalences de quantités. Dans toutes ces activités, le champ numérique s'étendait jusqu'à 20 au plus. Les résultats n'indiquent pas de différence dans les performances aux premier et deuxième temps d'évaluation mais une différence significative entre le premier et le troisième temps. De plus, il existe une généralisation de cette amélioration sur les tâches non spécifiquement entraînées de comparaison de quantités symboliques et non symboliques. Ces données sont en faveur d'un bénéfice de l'entraînement aux activités numériques sur les compétences en mathématiques chez les enfants T21. Ainsi, il semblerait qu'une intensification de la pratique mathématique fortement appuyée sur les représentations verbales permette d'améliorer les habiletés numériques même au niveau non-symbolique. Toutefois, il convient de s'interroger quant au biais lié à la particulière attention apportée à ces enfants durant 6 semaines, qui a pu induire un effet de motivation et d'augmentation de l'estime de soi.

Bien que démontrant des effets bénéfiques, cette étude ne permet pas de statuer sur les effets d'un programme impliquant spécifiquement les représentations analogiques et non-symboliques des nombres. Est-il possible de dépasser les effets d'un entraînement verbal en réalisant un entraînement non verbal sollicitant le *mapping* ? Nous faisons l'hypothèse qu'en se basant sur un système numérique approximatif préservé et en sollicitant l'interaction des deux systèmes nous devrions constater un bénéfice supérieur comparativement à un apprentissage basé uniquement sur le système numérique verbal et exact.

De ce fait, notre objectif ici est double. Il s'agit tout d'abord de mieux définir les déficits numériques propres aux personnes atteintes d'une trisomie 21 afin de cerner la pertinence d'une remédiation basée sur le sens des nombres et du calcul et la mise en correspondance entre les différentes représentations. Cela nous permettra également d'adapter et d'évaluer les bénéfices d'un programme d'apprentissage fondé sur ce type représentations, puisque les apprentissages existants, basés sur le calcul exact et verbal seul, ne semblent pas bénéfiques pour cette population.

Nous allons maintenant développer les études réalisées auprès d'enfants et d'adolescents T21 pour répondre à ces objectifs. Nous analysons les résultats de deux études successives: la première qui évalue les capacités de *mapping* avec un échantillon d'enfants T21 et la seconde qui consiste à suivre l'évolution des habiletés numériques chez des enfants et adolescents T21 selon leur participation à un programme d'entraînement au calcul approximatif et non symbolique ou au calcul exact et verbal.

Chapitre 7

Etudes sur le « sens du nombre » et le *mapping* entre représentations numériques dans la trisomie 21

1. Les capacités de *mapping* chez les T21

1.1. Cadre général et hypothèses

Par le biais de cette première étude, nous cherchons à analyser les capacités de mise en correspondances entre représentations symboliques et non symboliques chez les enfants T21.

Pour cela, nous comparons les performances des enfants T21 avec celles d'enfants typiques appariés sur l'âge mental et sur l'âge chronologique à une tâche de *mapping* numérique. Les études antérieures n'évaluent pas ce type de compétence chez les personnes atteintes de trisomie 21. Comme nous l'avons vu précédemment, les recherches s'attardent davantage à étudier les compétences de comparaison relative de quantités (Camos, 2009 ; Paterson, Girelli, Butterworth et Karmiloff-Smith, 2006 ; Sella, Lanfranchi et Zorzi, 2013). Ansari et ses collaborateurs (2009) se sont plutôt intéressés à ce type de capacité chez les personnes atteintes du syndrome de Williams. Toutefois, ils n'ont analysé les performances des participants que pour des numérosités de 5, 7, 9 et 11 points.

La pertinence d'un programme d'apprentissage numérique basé sur l'estimation et le *mapping* entre représentations n'a de sens que si les personnes atteintes de trisomie 21 sont en mesure d'apparier les petites et moyennes quantités avec le nombre symbolique correspondant. Dans cette étude, nous nous attendons à ce que les enfants T21 performent aussi bien que le groupe d'enfants typiques apparié sur l'âge mental, indiquant alors que cette compétence de *mapping* est seulement retardée par rapport à leur âge chronologique. Ainsi, envisager un programme d'apprentissage tel que nous le concevons serait possible pour aider au développement des connaissances numériques dans cette population.

1.2. Participants

Le groupe expérimental est constitué de 18 enfants et adolescents T21 âgés de 8,2 à 17,2 ans (âge moyen = 13,4 ans). La trisomie est de type libre, forme la plus fréquemment rencontrée. Aucun n'est scolarisé en milieu ordinaire ; ils ont été recrutés auprès d'institution d'accueil diverses (IME, GEIST, ...). Leur âge mental moyen est de 5,8 ans (de 4,5 à 7 ans).

Pour effectuer les comparaisons, deux groupes contrôles sont constitués. Le premier équivalent à l'âge chronologique (AC) moyen est composé de 18 enfants et adolescents typiques de 9 à 20 ans (âge moyen= 13,4 ans). Le second, équivalent à l'âge mental moyen (AM), est composé de 18 enfants âgés de 4 à 7 ans (âge moyen= 5,8 ans).

1.2.1. Matériel et procédure

Un consentement éclairé a été obtenu auprès de tous les participants et de leurs responsables légaux au début de l'étude.

Afin d'évaluer leur âge mental, les enfants du groupe T21 ont réalisé le subtest Matrices de la Nouvelle Echelle Métrique d'Intelligence 2ème version (NEMI 2, Cognet, 2006) Le test ZAREKI-R (Von Aster et Dellatolas, 2006) leur a également été administré afin de vérifier qu'ils connaissent la suite des nombres. Les enfants typiques des deux groupes contrôle ne présentaient pas de difficultés d'ordre cognitive ou numérique. Ils connaissaient également tous la suite des nombres.

Tous les participants ont réalisé une tâche de *mapping* entre deux représentations numériques (Figure 14). Il s'agit d'une épreuve informatisée permettant d'évaluer la capacité des participants à faire le lien entre une grandeur analogique et le nombre symbolique écrit qui correspond en le désignant sur une ligne numérique externe graduée de 1 à 23. Par défaut, une réponse orale peut également être acceptée.

Après la présentation d'une croix de fixation durant une seconde, une quantité est présentée dont la magnitude varie de 2 à 19 durant une seconde. Ensuite, un masque visuel apparaît en attendant la réponse orale ou de pointage du participant. Au total, les 17 quantités sont présentées à chaque participant dans un ordre aléatoire. L'expérimentateur enregistre dans le programme le nombre désigné par l'enfant pour chaque item. Si le participant ne donne pas de réponse, ou s'il a fait preuve d'un manque d'attention, l'expérimentateur enregistre sur le clavier une absence de réponse du sujet. Les réponses aux quantités 2, 3 et 4 ont été utilisées afin de vérifier les capacités de *subitizing* des participants. Ces réponses ne sont pas considérées pour l'analyse des résultats à la tâche de *mapping*.

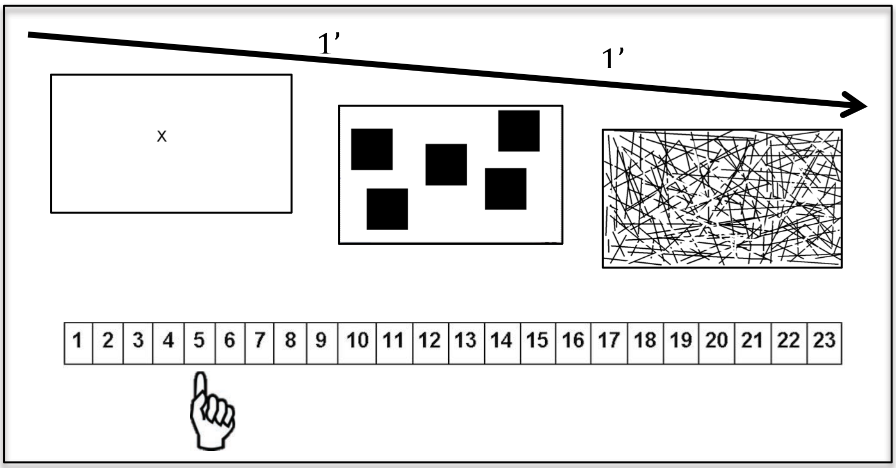


Figure 14. Procédure de la tâche de *mapping*

1.2.2. Résultats

A la tâche de *mapping*, nous obtenons pour chaque participant deux indicateurs de réussite : la réponse donnée et l’écart avec la réponse attendue (cf. Annexe A, B et C). Avec ces indicateurs, nous pouvons calculer un pourcentage global de réponses exactes ainsi que la variabilité globale avec l’écart-moyen de chaque participant pour l’ensemble des numérosités.

Analyse des réponses données à chaque numérosité et pourcentage de réponses exactes

Une analyse qualitative rapide permet de voir que les pourcentages de réponses exactes varient au niveau intra-groupe mais aussi intergroupes avec un pourcentage de réussite plus élevé pour le groupe contrôle apparié sur l’âge chronologique (Figure 15).

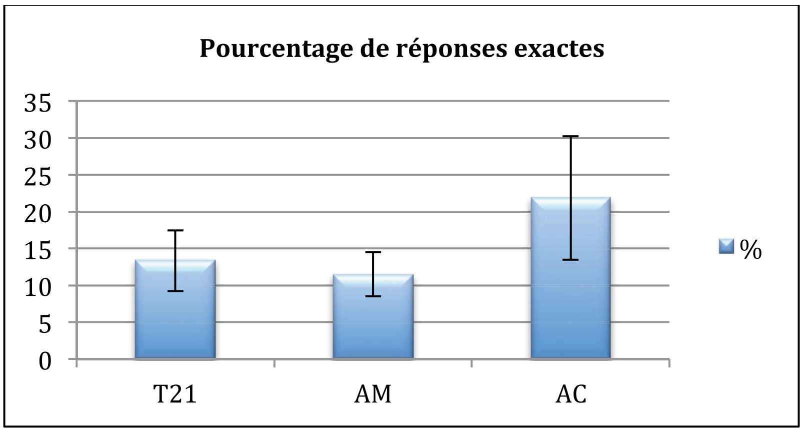


Figure 15. Pourcentage de réponses exactes pour chaque groupe

Plus précisément, quand on s'intéresse à la réponse moyenne par numérosités de chaque groupe, on observe des différences selon la numérosité concernée. Par exemple, les réponses sont moins précises pour les numérosités plus importantes. Ce constat est valable dans les trois groupes. Ce résultat montre un effet lié à la taille des nombres, traduisant une représentation moins fine des plus grandes quantités. Puisqu'il est observé dans les trois groupes, il ne peut être lié à un déficit spécifique au groupe T21.

Etant donné la taille de nos échantillons et l'absence d'homogénéité des variances des réponses brutes, nous avons utilisé le test non-paramétrique de Mann-Whitney pour analyser les résultats.

Quand on compare les réponses brutes en fonction de la numérosité de chaque participant du groupe T21 et du groupe contrôle AC, on trouve une différence significative pour 6 ($U=244,5$; $p<.,01$), pour 9 ($U=230,5$; $p<.,05$), pour 11 ($U=233,5$; $p<.,05$), pour 12 ($U=241$; $p<.,05$), pour 14 ($U= 225$; $p<.,05$), pour 17 ($U=248,5$; $p<.,001$), pour 18 ($U=253,5$; $p<.,001$) et pour 19 ($U=246$; $p<.,001$).

Quand on compare le groupe T21 et le groupe contrôle AM, on trouve une différence significative pour les numérosités 6 ($U=255$; $p<.,001$), 7 ($U=245$; $p<.,001$), 11 ($U=228,5$; $p<.,05$), 12 ($U=225$; $p<.,05$), 17 ($U=251,5$; $p<.,001$), 18 ($U=295,5$; $p<.,001$) et 19 ($U=240,5$; $p<.,05$).

L'analyse indique qu'il n'y a pas de différence significative dans le pourcentage de réponses exactes à la tâche de *mapping* entre le groupe contrôle AC et le groupe T21 ($U=174,5$; $p=.,69$). La différence dans le pourcentage de réponses exactes entre le groupe contrôle AM et le groupe T21 n'est pas significative non plus, bien qu'une légère tendance se dégage ($U= 114,5$; $p=.,13$). Il n'y a donc pas de différence entre les groupes contrôles et les participants T21 dans les compétences de *mapping* pour les quantités de 5 à 19.

En définitive, les personnes T21 répondraient de manière aussi précise que les participants appariés sur l'âge mental et l'âge chronologique. Il n'y a pas de retard au niveau de cette habileté dans la trisomie 21.

Analyse de la variabilité: calcul des écarts absolus pour chaque numérosité et de la moyenne des écarts de chaque groupe

En calculant l'écart absolu de chaque réponse donnée par le participant avec la quantité cible, on obtient un tableau détaillé des écarts avec l'écart moyen de chaque participant et l'écart moyen de chaque groupe.

Au niveau de la moyenne des écarts par groupe, l'analyse qualitative permet d'observer une différence entre le groupe T21 et le groupe AM avec le groupe AC. Visiblement, les participants qui ont le même âge chronologique répondraient à la tâche en s'écartant moins de la cible ; ils seraient donc plus précis (Figure 16).

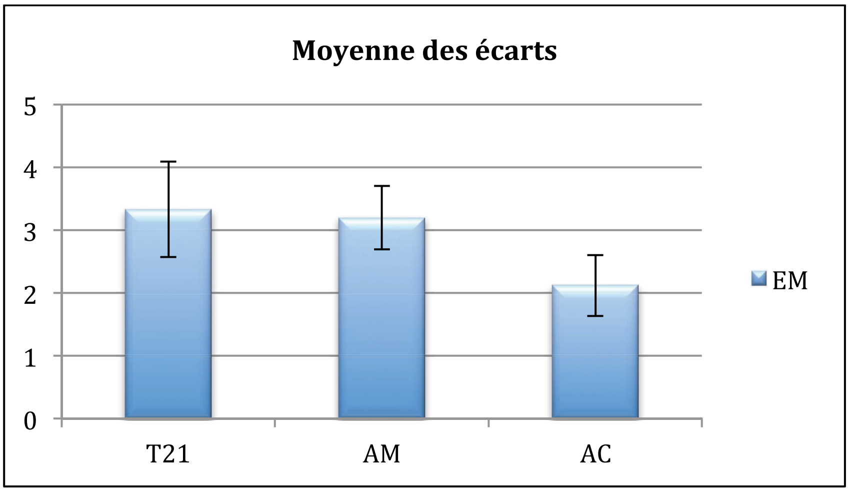


Figure 16. Moyenne des écarts par groupe

Dans la littérature, on parle d'effet de grandeur des nombres, c'est-à-dire que plus la quantité est importante, plus la variabilité est marquée. C'est ce qu'on constate dans la Figure 17, où, pour les trois groupes, l'écart moyen augmente avec le taille des nombres. Il y aurait donc bien une activation de l'ANS dans cette tâche chez les participants T21, tout comme dans la population typique.

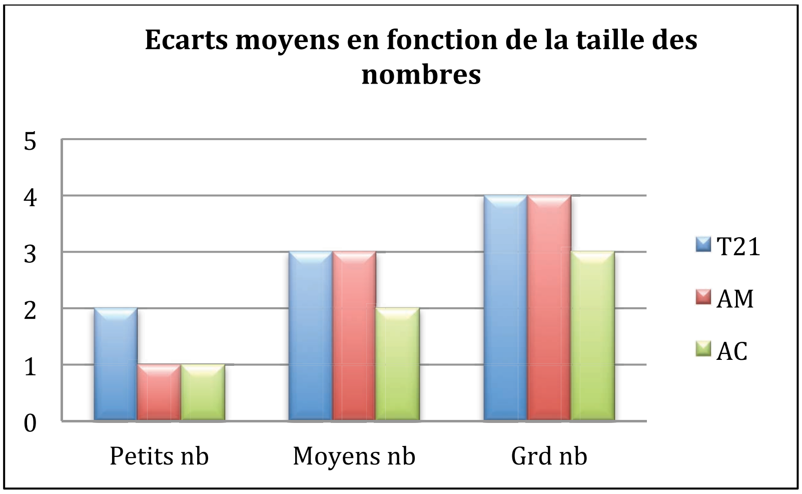


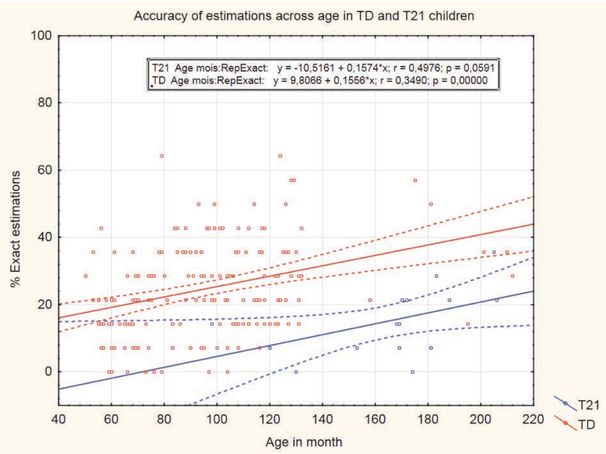
Figure 17. Ecarts moyens de chaque groupe en fonction de la taille des nombres (petits nombres de 5 à 8, moyens nombre de 9 à 13 et grands nombres de 14 à 19).

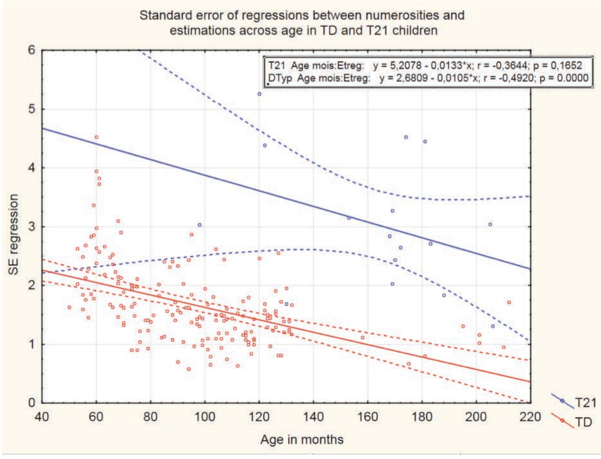
Au moyen du test U de Mann-Whitney, nous analysons les écarts moyens de chaque groupe. En comparant le groupe T21 et le groupe AC, nous trouvons une différence significative ($U=84$; $p<.05$), indiquant une différence dans la moyenne des écarts à la tâche d'appariement. Comme attendu, il n'y a pas de différence entre le groupe T21 et le groupe AM ($U=167$; $p>.8$). Ces résultats indiquent que les participants T21 ont des capacités d'appariement au moins équivalente à celle de participants de même âge mental. Il existe en revanche un retard par rapport aux participants de même âge chronologique.

Ces résultats sont intéressants puisqu'ils permettent de montrer que les personnes atteintes de trisomie 21 disposent des mêmes compétences d'appariement entre une quantité et un nombre. Au niveau de l'exactitude des réponses, leurs performances ne sont pas significativement différentes des personnes typiques de même âge mental et chronologique (tout au moins pour les nombres jusqu'à 20). Ils sont donc capables d'indiquer la valeur d'une quantité de manière exacte de la même manière que les personnes typiques.

Au niveau des capacités d'estimation, on trouve une différence uniquement par comparaison avec le groupe apparié sur l'âge chronologique. Les personnes atteintes de trisomie 21 sont en mesure d'estimer la numérosité d'une quantité mais de manière moins précise que les personnes de même âge chronologique. En revanche, leurs performances ne diffèrent pas de celles d'enfants typiques de même âge mental. Leurs capacités d'appariement sont donc en décalage pour leur âge mais non déviante.

Une analyse plus élaborée des trajectoires individuelles a été réalisée par la suite (au moyen de régressions linéaires) et permet de préciser la nature de ce décalage (Meyer, Vilette et Sockeel, 2014). Ci-dessous (Figures 18 et 19) deux graphiques illustrant le décalage entre le groupe T21 et le groupe témoins apparié en âge mental et chronologique. On constate un décalage (-20%) dans le pourcentage d'estimations exactes avec l'âge pour les participants T21. De plus, il existe dans cette population un retard dans la variabilité des réponses avec l'âge (Figure 19). Le retard observé sur ces deux indicateurs semble se résorber progressivement avec l'âge.





Figures 18 et 19. Régressions linéaires du pourcentage d'estimation exactes (à gauche) et de la variabilité des réponses (à droite) des participants typiques et des T21 (Meyer, Vilette et Sockeel, 2014).

L'ensemble de ces résultats confirme la possibilité de se baser sur l'ANS pour construire les apprentissages numériques chez les enfants atteints du syndrome génétique de la trisomie 21. Nous avons ainsi conçu un programme de remédiation adapté, basé sur le sens des nombres et du calcul par l'intermédiaire d'activités d'estimation sur la ligne numérique.

2. Etude d'apprentissage basée sur l'estimation sur la LNM et le *mapping* entre représentations

2.1. Cadre général et hypothèses

Nous avons montré dans la première étude que les personnes atteintes de trisomie 21 disposent des mêmes capacités d'appariement que les personnes typiques de même âge mental. De plus, elles ne sont pas moins précises dans leurs estimations que les tout-venants de même âge chronologique et mental. En revanche, à âge chronologique équivalent, la précision de leurs estimations est inférieure à celle des typiques. Ces premiers résultats permettent de justifier le recours à un apprentissage basé sur un entraînement à l'appariement entre représentations numériques.

L'objectif de la seconde étude est donc de réaliser un apprentissage basé sur le sens des nombres et l'appariement entre représentations par l'intermédiaire d'une activité d'estimation numérique. Notre hypothèse est qu'un tel apprentissage sera plus efficace sur les performances mathématiques qu'un apprentissage classique basé sur le calcul symbolique exact.

Deux groupes sont constitués et réalisent chacun un apprentissage basé sur l'estimation et l'appariement entre représentations (ci-après désigné apprentissage Approximatif) et un apprentissage basé sur le calcul exact symbolique (ci-après désigné apprentissage Exact). L'ordre des deux apprentissages est contrebalancé : le premier groupe (groupe AE) suit l'ordre d'apprentissage A⇨E tandis que le second groupe (groupe EA) suit l'ordre inverse E⇨A. Cette précaution méthodologique permet de contrer les effets liés au groupe contrôle c'est-à-dire, de fournir aux deux groupes la possibilité d'accéder un apprentissage dont les effets sont supposés plus importants que l'apprentissage classique.

Pour l'apprentissage Approximatif, nous avons recours à un logiciel informatique (l'"Estimateur") dont l'efficacité a été démontrée dans les troubles spécifique d'apprentissage numérique chez les enfants au développement typique (Vilette, Mawart et Rusinek, 2010 ; Vilette et Schneider, 2011). Cet outil permet de mettre en correspondance les représentations analogiques (quantités) et les représentations symboliques (nombres écrits).

Pour l'apprentissage Exact, nous avons également recours à des programmes informatiques, sous forme de jeux, qui exercent le dénombrement et calcul verbal exact (comptage, suite ordonnée, addition).

La procédure est ainsi conçue de sorte que les effets d'ordre des deux apprentissages soient précisément distingués et analysés. Nous faisons en effet l'hypothèse que les performances devraient davantage s'améliorer lorsque l'apprentissage Approximatif se déroule en premier car il permettrait de rendre plus pertinent l'apprentissage suivant basé sur le calcul symbolique exact.

Nous analyserons également les capacités de comparaison relative de deux quantités, avant et après les apprentissages, en utilisant plus de numérosités par rapport aux études antérieures (Camos, 2009 ; Paterson et al., 2006 ; Sella et Iafranchi, 2013).

2.2. Participants

Seize enfants et adolescents français (Cf. Annexe D) porteurs d'une trisomie 21 (de forme libre) ont participé à cette étude d'apprentissage. Ils sont âgés de 8,4 à 15,6 ans (âge moyen = 12,3 ans). Leur âge mental est compris entre 4,5 ans et 7 ans avec un âge mental moyen de 6 ans. Comme pour l'étude précédente, ils ont tous été recrutés dans différents types d'institutions (hors école).

Chaque enfant a été assigné aléatoirement à l'une des deux conditions suivantes : apprentissage Approximatif d'abord, puis apprentissage Exact (Groupe AE, n=8) ou apprentissage Exact d'abord, puis apprentissage Approximatif (Groupe EA, n= 5).

La durée de participation à l'étude est d'environ 3 mois et les deux phases d'apprentissage sont réalisées au domicile familial ou dans l'institution fréquentée par l'enfant.

2.3. Matériel et procédure

Après avoir délivré une information orale aux responsables légaux et aux enfants, un consentement éclairé à été recueilli auprès de chacun d'eux avant de participer à l'étude. Toutes les étapes de l'étude ont été réalisées avec un psychologue habitué à ce type de population.

Lors d'une étude préliminaire, sept enfants porteurs d'une trisomie 21 ont réalisé des épreuves d'estimation numérique (tâche de *mapping* numérique et tâche de Comparaison relative de deux quantités) et une batterie d'évaluation des compétences mathématiques (ZAREKI-R) dans l'objectif d'adapter le programme "Estimateur" qui est utilisé pour l'apprentissage. Nous avons pu ainsi ajuster la passation et les consignes pour cette population, puis moduler la taille des nombres à présenter, la nature des opérations et la graduation de la règle de réponse.

Après avoir fixé les paramètres des deux types d'apprentissage, nous avons assigné de manière aléatoire chaque participant à un groupe. En fonction du groupe, chaque participant réalise une première phase d'apprentissage au calcul verbal exact (classique) ou au calcul analogique approximatif ("Estimateur"). Lors de la seconde phase, chaque participant réalisait l'apprentissage qui n'a pas été réalisé la première fois. Ainsi, chaque participant bénéficiait des deux types d'activités.

2.3.1. Pré-test, niveau de base

Tous les enfants ont d'abord réalisé un pré-test afin de relever leur niveau de base. Il contenait les subtests *Matrices Analogiques* et *Connaissances* de la *Nouvelle Echelle Métrique d'Intelligence* 2ème version (NEMI-2, Cognet, 2006) afin de déterminer leur âge de développement.

Le subtest *Matrices Analogiques* évalue les capacités d'induction, de déduction et de la mémoire de travail. Il s'agit donc d'une épreuve non verbale, indépendante du langage et de la scolarité, indiquant l'efficience de l'intelligence fluide.

Le subtest *Connaissances* évalue les connaissances générales sur le monde. Cette épreuve est dépendante du langage et du niveau socio-culturel de chaque participant. Les performances à ces deux épreuves sont standardisées ce qui permet ensuite d'obtenir un âge de développement.

Afin d'évaluer le niveau de performances mathématiques, nous avons administré les épreuves du ZAREKI-R (Von Aster et Delatollas, 2006). Ce test permet de mesurer avec 12 subtests la connaissance de la séquence des nombres, le dénombrement, le transcodage numérique, la connaissances des faits numériques et des procédures opératoires élémentaires, les capacités d'estimation et de sens des nombres. La cotation permet ainsi d'obtenir un score total d'efficience à la batterie ainsi qu'un score par sous-épreuves.

Nous avons également administré une tâche informatisée de comparaison relative de deux quantités (Vilette, 2008) afin de mesure l'acuité du sens des nombres chez nos sujets T21. On présente simultanément durant 1 seconde sur ordinateur deux collections de points dont la grandeur varie de 2 à 21. Selon les items la différence entre les deux collections à comparer est comprise entre 1 et 4. Le sujet doit indiquer sur le clavier quelle est la quantité la plus grande (à droite ou à gauche de l'écran) en appuyant sur une pastille verte ou bleue placée à droite ou à gauche du clavier. Trois types de patterns peuvent être présentés : des comparaisons avec la quantité 4 (12 essais), avec la quantité 11 (16 essais) et avec la quantité 16 (20 essais). Tous les participants ont réalisé la comparaison à la quantité 11, les plus performants allant jusqu'à la comparaison à 16.

2.3.2. Phase d'apprentissage Exact

Un ensemble d'exercice de calcul sont proposés sur ordinateur lors de la phase d'apprentissage Exact. Cette phase se déroule sur 6 séances individuelles d'environ 30 minutes. La progression de chaque participant est définie en fonction de ses résultats au pré-test.

Au total, 5 activités informatisées (Figure 20) sont possibles durant les séances. De difficulté croissante, les sujets ont réalisé :

- l'activité « Je compte » : faire la correspondance entre un nombre d'objet et un nombre sur une carte de jeu. Les quantités varient de 1 à 5 puis de 5 à 10.
- l'activité « Ordinombre » : ranger les nombres du plus petit au plus grand. La taille des nombres à ranger va de 1 à 10, 11 à 20, 1 à 20 ou 1 à 100.
- L'activité « Plus » : ranger les additions présentées dans les maisons du nombre qui correspondent. Le total de l'addition est de 10 ou 20 au maximum.
- L'activité « Plus ou moins » : similaire au jeu « Plus », excepté qu'on peut également présenté des soustractions.
- L'activité « Opérations » : résoudre un calcul posé en colonne sans retenue (nombres à deux chiffres).

La plupart des participants ne sont pas allés au-delà de l’activité « Plus » car leurs performances étaient trop faibles. Pour accéder à l’activité de niveau supérieur, les participants devaient réussir systématiquement chaque exercice du niveau précédent.

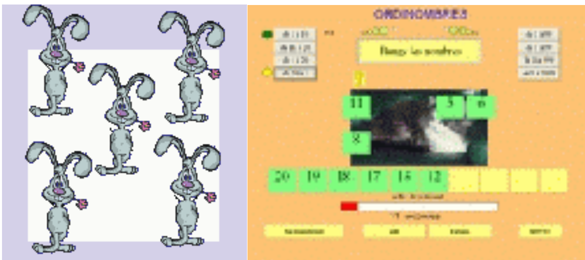


Figure 20. Capture d’écran des jeux « Je compte » et « Ordinombres ».

2.3.3. Phase d’apprentissage Approximatif

Pour l’apprentissage Approximatif, nous avons adapté le logiciel “Estimateur” suite aux observations recueillies avant de démarrer l’étude. Rappelons que l’”Estimateur” est un programme informatique qui génère aléatoirement sur un écran d’ordinateur un nombre ou calcul écrit. Une règle numérique de réponse de 20 cm environ, bornée de 0 à 500 au maximum, spatialement orientée de gauche à droite apparaît. Les participants doivent estimer la position des nombres ou le résultat du calcul (addition, soustraction, multiplication, division) en plaçant un curseur sur la règle numérique. Il est possible d’ajuster la graduation de la règle afin d’apporter plus d’indications aux enfants. De même, on peut ajuster la précision demandée entre la réponse attendue et la réponse donnée par le participant. Le paramétrage dépend des objectifs que l’on se fixe ainsi que de la population.

Cette phase se déroule sur 6 séances individuelles de 30 minutes environ. Là encore, la progression de chaque enfant est définie en fonction de ses performances au pré-test.

L’apprentissage prévoit de réaliser les activités Collections et Dénombrement (Figure 21) avec des champs numériques allant de 0 à 12, 0 à 24 ou 0 à 100. Pour passer au niveau de difficulté suivant les participants devaient atteindre 75% de réussite à une série de 10 items.

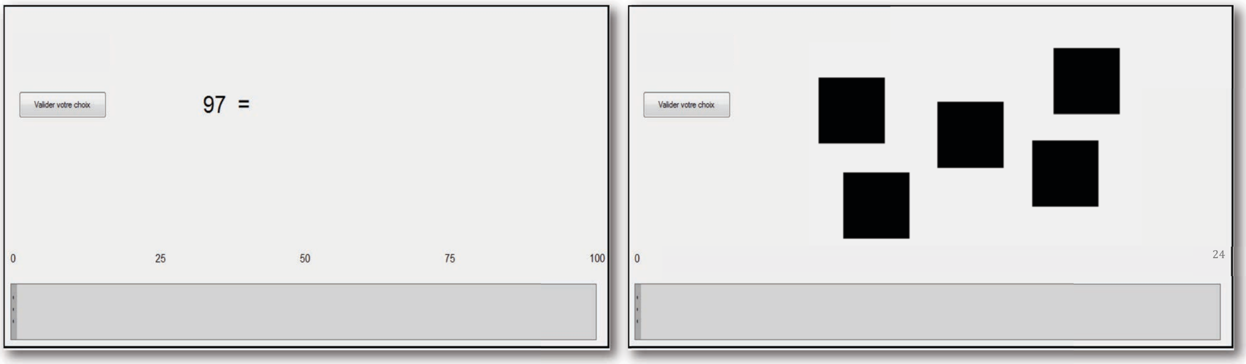


Figure 21. Captures d’écran de l’”Estimateur” avec les activités Dénombrement (à gauche) et Collections (à droite).

2.3.4. Post-test 1 et 2

Deux post-tests ont lieu durant le protocole. Le premier se déroule entre les deux phases d’apprentissage et le second après les deux phases. L’objectif est de mesurer les effets de chaque type d’apprentissage mais également les effets d’ordre. A chaque test, on administre aux participants le ZAREKI-R.

2.4. Résultats

2.4.1. Niveau de base

Nous avons analysé les performances des participants des deux groupes au pré-test afin de relever leur niveau de base, ce qui permettra de visualiser leur progression lors des deux apprentissages.

Préalablement, nous avons vérifié que les deux groupes étaient équivalents. On ne trouve effectivement pas de différence significative dans les âges chronologiques et les âges mentaux entre les deux groupes (p=.6). Il n’y a pas non plus de différence significative dans les résultats au pré-test avec le ZAREKI-R pour les deux groupes (p=.51).

Au niveau des capacités de comparaison relative de deux quantités, nous n’observons pas de différence significative entre les deux groupes. Les performances répondent à un effet de ratio typique dans ce type de tâche, avec une réussite qui augmente avec l’écart entre les deux quantités présentées. En comparaison à une quantité 16 (Figure 22), les participants T21 répondent correctement dans cette tâche à hauteur de 66% pour une différence de 2 (14 ou 18). Le pourcentage de bonnes réponses passe à 72 % pour une différence de 3 (13 ou 19) et 83% pour une différence de 4 (12 ou 20). Quand le ratio est supérieur à 9:10, le taux de réussite est supérieur à

50%, les participants T21 réussissant à discriminer des quantités même avec un ratio supérieur à 1:2, comme on peut le voir dans d'autres études.

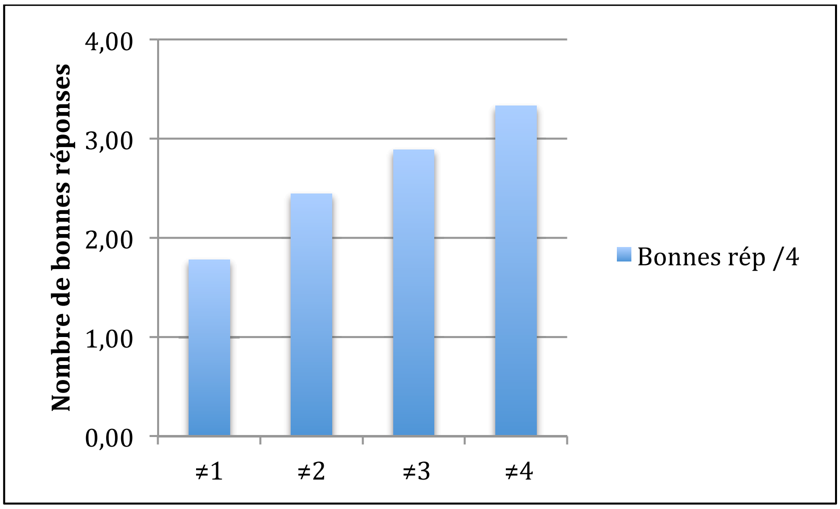


Figure 22. Nombre de bonnes réponses dans une tâche de comparaison relative de quantités en fonction de la différence entre les deux quantités présentées.

Notre échantillon est inférieur à 10 participants par groupe et les conditions d'application de l'ANOVA ne sont pas toujours vérifiées. C'est pourquoi les analyses suivantes ont été réalisées avec des tests non paramétriques.

2.4.2. Performances globales au ZAREKI-R

Globalement, l'évolution du score moyen au ZAREKI-R n'est pas la même selon le groupe (Figure 23). En effet, on constate deux effets : 1) la moyenne des scores augmente plus fortement pour le groupe qui réalise d'abord l'apprentissage Approximatif ; 2) l'apprentissage Exact a peu d'influence sur les performances mathématiques au ZAREKI-R, et cela d'autant plus qu'il est réalisé en second apprentissage. Ainsi, les participants T21 du groupe AE (apprentissage Approximatif en premier) passent d'un score de 27 à 40 au ZAREKI-R. Le score reste stable après l'apprentissage exact.

Quand aux participants du groupe EA (apprentissage Exact d'abord), ils passent d'un score moyen de 30 à 31 au ZAREKI-R. Après l'apprentissage Approximatif, leur score moyen est de 36.

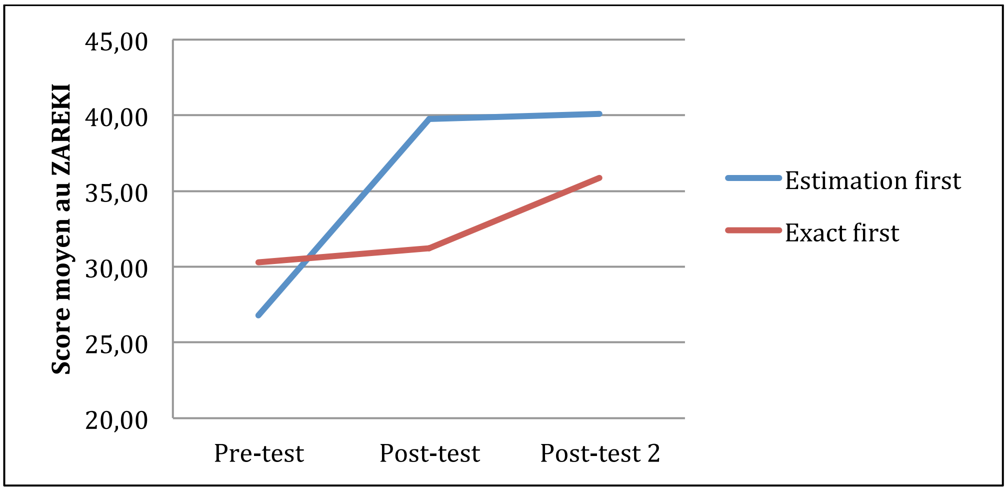


Figure 23. Evolution du score moyen au ZAREKI-R par groupe selon la phase d'évaluation.

Pour vérifier cette description, nous avons réalisé un test U de Mann Whitney sur la différence de score au ZAREKI-R.

Nous avons calculé la différence de score de chaque participant entre le pré-test et le post-test 1. L'analyse statistique indique une différence significative dans la différence de score entre le groupe approximatif d'abord et le groupe exact d'abord ($U=10$; $p<.05$). L'amélioration des performances mathématiques au ZAREKI-R est donc plus importante pour le groupe qui a réalisé l'apprentissage Approximatif en premier.

Ces résultats montrent l'intérêt d'un apprentissage basé sur l'appariement entre représentations à partir de l'estimation pour améliorer les performances numériques chez les enfants atteints de trisomie 21. Un apprentissage basé sur le calcul symbolique exact est peu conséquent auprès de cette population en regard des effets observés. De plus, réaliser un apprentissage Approximatif en seconde intention (c'est à dire après un apprentissage Exact) semble moins efficace que s'il est réalisé en première intention.

2.4.3. Performances au ZAREKI-R par subtests

Nous allons maintenant nous intéresser plus en détail aux effets de chaque apprentissage sur les différentes compétences numériques évaluées par le ZAREKI-R. La Figure 24 représente l'évolution des scores de chaque subtest entre le pré-test et le post-test 1 pour chacun des groupes. Nous pouvons constater que l'apprentissage Approximatif améliore les performances à l'ensemble des subtests de façon plus ou moins marquée.

En revanche, l'apprentissage Exact n'a pas - ou peu - d'effet. Parfois même, les performances diminuent à certains subtests, notamment l'activité de Lecture de nombres et la Comparaison de deux nombres à l'écrit.

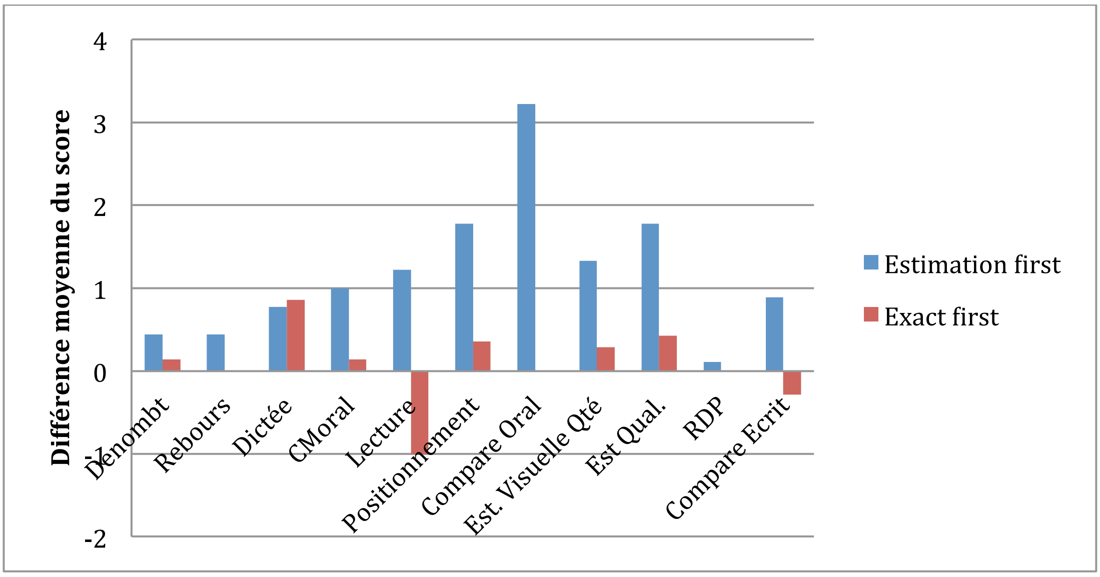


Figure 24. Différence moyenne de score entre le pré-test et le post-test 1 pour chaque subtest du ZAREKI-R en fonction du groupe.

Pour tester ces observations, nous avons réalisé le test U de Mann-Whitney sur la différence de score à chaque subtest entre le pré-test et le post-test 1 en fonction du groupe. On trouve une différence significative entre les deux groupes seulement pour l'épreuve Lecture de nombres ($U=10$; $p<.05$). L'épreuve Comparaison de deux nombres à l'oral montre une tendance à une différence entre les deux groupes ($U=17$; $p=.14$), tout comme l'épreuve Comparaison de deux nombres à l'écrit ($U=13{,}5$; $p=.055$). Il n'y a pas de différence significative sur les autres subtests.

Malgré les différences positives observables sur la Figure 24, les faibles effectifs de notre échantillon ne permettent pas d'obtenir d'autres effets significatifs. Mais compte tenu de l'effet de groupe sur le score global au ZAREKI-R, il est vraisemblable qu'avec un échantillon de taille supérieure, nous obtenions des effets significatifs sur d'autres subtests.

2.4.4. Effet de l'ordre d'apprentissage

Pour tester l'effet d'ordre, nous avons d'abord calculé la différence de score entre le pré-test et le post-test 2. La différence moyenne pour le groupe Estimation d'abord est de 13,3 points contre 5,5 points pour le groupe Exact d'abord. L'analyse indique qu'il n'y a pas de différence significative entre les deux groupes (U=18 ; p=.18). Ce résultat semble censé puisque les deux groupes ont participé aux deux apprentissages.

Néanmoins, et afin de comparer les effets de l'apprentissage Approximatif dans chaque groupe, nous avons ensuite comparé les différences de scores au ZAREKI-R pré/post-test 1 pour le groupe AE et celles post1/post-test 2 pour le groupe EA d'abord (Figure 25). Cette analyse permet de mesurer les effets seuls de l'apprentissage Approximatif réalisé en première ou en seconde intention. Les résultats indiquent une différence significative entre les deux groupes (U=12,5 ; p<.05). Les effets de l'apprentissage Approximatif sont donc plus importants s'il est réalisé en premier. L'apprentissage Exact semble atténuer les effets de l'apprentissage approximatif.

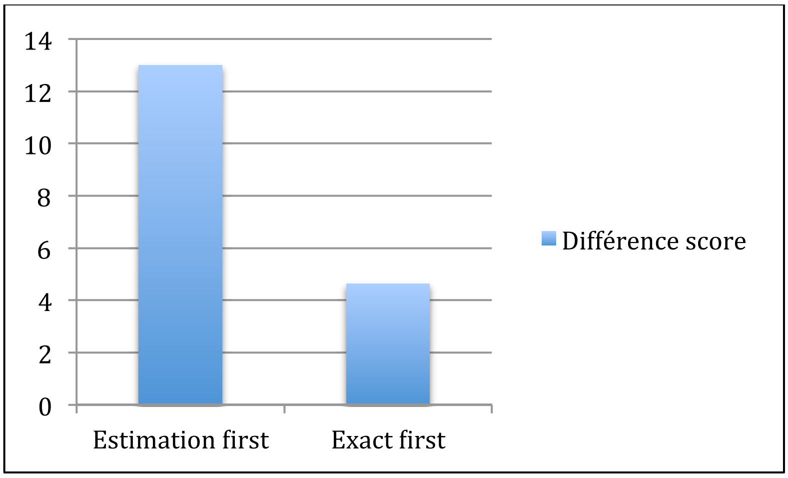


Figure 25. Différence de score au ZAREKI-R après réalisation de l'apprentissage approximatif (pur) pour chaque groupe.

3. Discussion

3.1. Sollicitation de l'ANS chez les enfants porteurs de la trisomie 21

Dans la première étude de cette partie, nous nous sommes intéressés aux capacités de mise en correspondance entre un nombre et une grandeur, chez des enfants et des adolescents de 8 à 17 ans atteints de trisomie 21. Notre objectif était de nous assurer des habiletés d'appariement dans cette population afin de proposer par la suite un programme de remédiation basé sur l'estimation numérique et le *mapping*. Nous avons émis l'hypothèse que les participants T21 étaient en mesure d'apparier une quantité avec la numérosité correspondante de manière aussi efficace que les participants de même âge mental, indiquant simplement un retard dans l'acquisition de cette compétence.

Les résultats indiquent que les participants T21 sont capables d'apparier de manière efficiente deux représentations numériques de forme différente (symbolique et analogique). Comme attendu, leur réussite à cette épreuve ne diffère pas de celle des enfants de même âge mental. Quand on s'intéresse aux capacités d'appariement exact, il n'y a pas non plus de différence avec les participants de même âge chronologique, montrant des capacités d'exactitude similaires dans les tâches d'estimation. En revanche, la précision des réponses est moins importante pour les groupes T21 et contrôle AM par rapport au groupe contrôle AC, révélant un retard d'acquisition. Les personnes atteintes du syndrome génétique de la trisomie 21 sont donc en mesure d'activer l'ANS de manière efficiente bien qu'elles soient légèrement en décalage d'un point de vue développemental.

Nos résultats sont partiellement en accord avec Sella et ses collaborateurs (2013). Dans leur étude, ils utilisaient plusieurs tâches de *matching-to-sample*, où il s'agit d'apparier une quantité ou un nombre arabe cible avec une quantité parmi 2 distracteurs. Quand il s'agit d'associer un nombre arabe avec la quantité qui correspond, leurs résultats montrent des performances significativement différente pour le groupe T21 par rapport au groupe apparié sur l'âge chronologique pour les grandes numérosités mais pas de différence avec les participants de même âge mental.

En revanche, pour les numérosités inférieures à 5, ils trouvent un déficit spécifique aux participants T21 que nous retrouvons partiellement dans notre étude. En effet, même si nous avons 14 participants adolescents qui réussissent l'appariement des quantités 2, 3 et 4 de manière équivalente aux deux groupes contrôles, il y a 5 participants qui sont sortis de l'analyse car ils échouent massivement au *subitizing*. Ce dernier résultat est également partiellement en contradiction avec Paterson et ses collaborateurs (2006) qui observent un déficit dans la discrimination de petites quantités chez les enfants trisomiques. Néanmoins, nous trouvons plusieurs explications à ces résultats. Bien qu'il s'agisse également d'une tâche d'appariement, on peut considérer que la tâche demandée par Sella et collaborateurs (2013) est différente de celle de notre étude puisqu'elle présente une charge cognitive en mémoire de travail plus importante, à cause de la présence de distracteurs. De plus, notre temps de présentation des quantités est d'une seconde, alors qu'il était de 250 millisecondes dans l'étude. De ce fait, avec un temps de présentation supérieur, il est possible que les participants T21 de notre étude aient eu le temps de dénombrer rapidement les quantités jusqu'à 4. Enfin, l'âge moyen de nos participants T21 est plus important, il est donc probable qu'ils aient rattrapé leur retard en matière de *subitizing*.

Ansari et ses collaborateurs (2007) ont également réalisé une tâche d'appariement auprès d'enfants et d'adultes typiques et atteints du syndrome de Williams. Dans ce syndrome, les troubles numériques font parti du tableau clinique avec des difficultés d'estimation de grandes numérosités, de représentation sur la ligne numérique mentale, une lecture et écriture de chiffres complexe échouée et un principe de cardinalité difficile à acquérir. En revanche, les faits numériques sont préservés, et la littérature relève des capacités de *subitizing* dans la norme. Dans leur étude, les auteurs demandent aux participants d'estimer au plus près les numérosités de plusieurs quantités (2, 3, 5, 7 9 et 11 points). Leurs résultats indiquent que les capacités d'appariement des participants atteints du syndrome de Williams sont déficitaires par rapport à des typiques de même âge mental ou chronologique. Ces résultats sont contraires à ceux que nous obtenons auprès des sujets T21. Toutefois, notre population est distincte de celle des Williams dans la mesure les T21 ont des capacités visuo-spatiales relativement préservées par rapport aux Williams, ce qui pourrait expliquer les différences observées.

Notre étude permet de mettre en lumière les capacités d'appariement numérique chez les personnes atteintes de trisomie 21 de 8 à 17 ans avec des quantités allant jusqu'à 19. Elle conduit à une conclusion importante : il n'y a pas de déficit dans les représentations analogiques dans ce syndrome. Ce résultat valide la possibilité d'une remédiation basée sur l'appariement entre les représentations. Il paraît pertinent d'utiliser la représentation analogique pour construire les apprentissages numériques en la mettant en correspondance avec sa représentation symbolique, qui fait défaut dans la trisomie.

3.2. Intérêt d'une remédiation basée sur la mise en correspondance entre les représentations

Nous avons mis en oeuvre une remédiation basée sur l'approximation numérique et l'appariement entre représentations par l'intermédiaire de l'outil "Estimateur". Pour cela nous avons constitué deux groupes de participants T21. Chaque groupe a bénéficié de 6 semaines d'apprentissage Approximatif et de 6 semaines d'apprentissage Exact dans un ordre contrebalancé. Notre hypothèse était que l'apprentissage Approximatif améliorerait davantage les performances numériques de personnes atteintes de trisomie 21 que le ferait un apprentissage basé sur le calcul exact. Nous avions également émis une hypothèse concernant l'ordre de réalisation des deux apprentissages, avec une amélioration des performances plus marquée pour le groupe ayant réalisée d'abord l'apprentissage Approximatif.

Nos résultats indiquent une amélioration significativement plus importante des performances numériques globales évaluées avec le ZAREKI-R suite à un apprentissage utilisant l'approximation numérique chez les T21 comparativement à un apprentissage numérique exact. Globalement, l'apprentissage exact apporte peu ou pas d'amélioration quand on observe chaque épreuve individuellement. En revanche, après un apprentissage basé sur le sens des nombres, les performances numériques sont généralement supérieures et significativement améliorées en lecture de nombres. Une tendance apparaît pour la comparaison de deux nombres à l'oral et à l'écrit.

Enfin, comme attendu, il existe un effet d'ordre des deux apprentissages. L'amélioration finale du score au ZAREKI-R au second post-test est significativement plus importante lorsque l'apprentissage Approximatif est réalisé avant l'apprentissage Exact. Ainsi, il semblerait que l'apprentissage Exact atténue les effets positifs de l'apprentissage Approximatif. Réaliser en première intention un apprentissage numérique Approximatif plutôt qu'oral par l'intermédiaire d'activités de *mapping* numérique semble donc pertinent. Cela n'est pas surprenant étant donné que le sens des nombres s'acquiert entre autre par les activités d'appariement entre les représentations. De plus, dans la population générale, on sait que les performances d'appariement entre les représentations sont des prédicteurs des performances mathématiques ultérieures.

Nous avons tout d'abord analysé les performances des deux groupes à l'épreuve de comparaison relative de quantités. Nos résultats indiquent que les participants sont capables de discriminer des quantités importantes même quand elles ne diffèrent pas beaucoup entre elles. Ces résultats sont différents de ceux obtenus par Camos (2009) qui montre que les participants ne réussissent pas à discriminer les quantités quand le ratio est inférieur à 1:2. Toutefois, les participants de son étude ont un âge moyen de 6 ans 1 mois tandis que l'âge moyen de nos participants est de 12 ans 3 mois. On observe également un effet de distance classique: plus les nombres à discriminer sont proches, plus ils sont difficiles à distinguer.

Paterson et ses collaborateurs (2006) n'ont pas trouvé pas de capacité de discrimination de quantités chez les jeunes enfants de 30 mois atteints de trisomie 21. Il est possible que cette compétence déficitaire soit liée à des difficultés de plus bas niveau encore, telle que des difficultés visuelles ou au niveau de la vitesse de traitement.

3.3. Qu’est-ce que cela nous apporte dans la compréhension du développement typique ?

Nous considérons que nos résultats se placent en faveur de l’hypothèse d’un déficit numérique lié à un défaut dans les relations établies entre les différents systèmes de représentations numériques. Les troubles dans ce domaine ne seraient pas forcément causés par des difficultés dans l’un ou l’autre des systèmes de traitements numériques. Ainsi, la perturbation des habiletés numériques qui existe dans la trisomie 21 serait plutôt la conséquence d’une perturbation dans l’établissement des correspondances entre les représentations, ce qui empêcherait d’accéder au sens des nombres et du calcul. En effet, les résultats de notre étude montrent que malgré des habiletés langagières déficitaires, il est possible d’améliorer les compétences numériques des personnes porteuses de la trisomie 21 par l’intermédiaire d’un programme de remédiation basé sur la mise en correspondance entre symboles et quantité et sur le calcul approximatif. De ce fait, même si on ne peut écarter totalement l’impact du déficit verbal sur les autres dysfonctionnements cognitifs, il est possible, après un entraînement succinct d’améliorer les performances numériques non-symboliques et symboliques (habiletés qui ne sont pas directement exercées).

La place du langage dans les habiletés numériques est un débat animé depuis plusieurs décennies. En nous intéressant à une population clinique déficiente dont les capacités langagières sont limitées, nous montrons qu’il est possible de détourner cette modalité pour développer les compétences mathématiques. Toutefois, des investigations plus précises sont nécessaires pour tenter de se positionner dans ce débat.

4. Conclusion

Nous avons vu dans le chapitre 6 que la prise en charge cognitive et numérique des personnes atteintes de trisomie 21 se limitait jusqu'à présent à des protocoles de remédiation symbolique et exact des capacités arithmétiques. Nous avons vu également que ces différents programmes utilisaient des indices visuels et spatiaux des nombres (bandes, points, cartes, ...) mais qu'ils rendaient les apprentissages dépendant des outils utilisés. De plus, dans la plupart des cas, il s'agissait d'activités non spécifiquement adaptées pour la population. Les effets de la plupart de ces protocoles n'ont pas été testés empiriquement et les effets décrits dans les études de cas semblent difficilement généralisables. La remédiation par l'intermédiaire des représentations symboliques ou sensorielles n'a donc pas fait ses preuves pour le moment.

A la différence du programme de remédiation numérique proposé par Chazoule et collaborateurs (2012), notre programme est basé uniquement sur la sémantique des nombres et l'appariement entre représentations. Les chercheurs avaient quant à eux utilisés différentes activités à la fois exactes et approximatives. De plus, le champ numérique dans leur étude ne dépassait pas 20, alors que dans notre étude les participants pouvaient aller jusqu'à 100 - bien qu'ils n'arrivent que jusqu'à 60 au maximum pour la majorité des participants. Dans les deux études, il existe une généralisation à des habiletés non spécifiquement entraînées.

Sur la base de capacités retardées mais préservées d'appariement entre représentations, nous avons proposé ici un entraînement à l'estimation numérique et la mise en correspondance entre les représentations pour remédier aux troubles numériques des personnes atteintes du syndrome génétique de la trisomie 21. Cet entraînement semble être plus avantageux qu'un entraînement uniquement basé sur le calcul exact et symbolique. Ce dispositif présente les avantages d'être ludique, adapté à la population des T21 et non ciblé uniquement sur le langage. Enfin et surtout, il permet aux participants de donner du sens aux nombres et aux calculs.

En dépit de capacités langagières déficitaires, les enfants et adolescents atteints du syndrome génétique de la trisomie 21 peuvent donc développer leurs compétences numériques si l'apprentissage réalisé auprès d'eux n'est pas uniquement basé sur le langage, le calcul exact et les symboles numériques. Nous montrons ici qu'il n'est pas indispensable de maîtriser le langage pour acquérir des habiletés mathématiques. Néanmoins, il n'est pas possible de répondre précisément à la question de l'implication réelle du langage numérique oral et écrit dans le développement de l'arithmétique. Afin de mieux comprendre le rôle et le développement des codes arabe écrit et verbal oral, il est nécessaire de mieux décrire la manière dont les différentes représentations se développement au fur et à mesure de leurs acquisitions, notamment à la période charnière du début de l’école élémentaire. De même, et puisque un protocole d’entraînement à l’estimation numérique semble pertinent dans le développement typique et atypique, il semble essentiel de savoir précisément sur quelle(s) représentation(s) baser cet entraînement. La question est notamment de savoir si le protocole doit se centrer sur les deux codes symboliques, et si la direction des appariements présente un intérêt. Ces deux aspects sont les objets de notre quatrième et dernière partie.

QUATRIEME PARTIE

Transcodages et interactions entre les systèmes de représentations

Le *mapping* ou « mise en correspondance » est une habileté que nous avons fréquemment évoquée tout au long de ce travail. En lien direct avec les habiletés de transcodage, il s'agit de la capacité à mettre en relation les représentations entre elles. Cette capacité apparaîtrait vers 4 ans (Kolkman, Kroesbergen et Leseman, 2013). La tâche utilisée est une tâche de « *number-to-position* », c'est à dire de mise en correspondance entre un nombre et sa représentation sous forme de grandeur (format analogique) sur une ligne numérique (Kolkman et al, 2013 ; Vilette, Mawart et Rusinek, 2010). Plus les différents codes sont maitrisés, plus leurs représentations sont précises et plus les performances à la tâche de *mapping* sont élevées. L'âge et la scolarisation apparaissent comme des facteurs importants dans le développement de cette capacité. Pour certains auteurs, les différentes représentations se développent initialement séparément, puis s'intègrent ultérieurement avec la LNM (Dehaene, 2001). La capacité de *mapping* devient alors de plus en plus fine avec l'expérience et l'âge (Booth et Siegler 2008 ; Siegler et Booth, 2004 ; Vilette, 2009).

Le *mapping* a été étudié chez les enfants de 5 ans par Lipton et Spelke (2005). Ils ont montré qu'à 5 ans il est encore difficile de mettre en correspondance les représentations entre elles, et que cette habileté est fortement en lien avec la maîtrise du système symbolique. Pour Holloway et Ansari (2008), les habiletés numériques non-symbolique influencent l'apprentissage formel des mathématiques. En effet, les résultats de leur étude montrent que les enfants de 6 à 8 ans qui ont de moins bons résultats scolaires en mathématiques sont également moins précis dans des tâches de *mapping* non symbolique vers symbolique. De même, les enfants qui présentent une dyscalculie ont des difficultés pour accéder, à partir d'une information numérique symbolique, au contenu non-symbolique qui s'y réfère (Rousselle et Noël, 2007).

Ainsi, le *mapping* semble être une habileté importante pour la réussite des apprentissages académiques (Mundy et Gilmore, 2009). Toutefois, selon les auteurs, le *mapping* est soit dépendant à la fois des représentations symboliques et non-symboliques – qui seraient alors des précurseurs - (Gilmore, McCarthy et Spelke, 2010 ; Jordan, Glutting et Ramineni, 2010), soit lié principalement à l'un ou l'autre code (Dehaene, 2001).

Kolkman, Kroesbergen et Leseman (2013) ont réalisé une étude qui apporte un éclairage sur l'évolution des représentations et du *mapping*. Leurs résultats montrent que les représentations symboliques, non symboliques et le *mapping* s'intègrent au cours de la scolarité primaire, après s'être développés initialement de façon distincte. Ce serait la représentation symbolique qui jouerait un rôle prédominant dans le développement des habiletés de mise en correspondance.

Dans la dernière étude de ce travail, nous avons cherché à approfondir l'étude des capacités de *mapping* en analysant les différentes relations possibles de mises en correspondance entre les différentes représentations (du non symbolique vers le symbolique, et réciproquement du symbolique vers le non symbolique). Il s'agit ainsi d'étudier le plus précisément possible comment les représentations numériques se développement en interaction au cours des premières années de scolarisation.

Nous allons revenir rapidement sur les études qui nous permettent de mieux cerner la complexité du transcodage et son développement. Puis, après avoir évoqué les questions en suspens, nous détaillerons l'étude que nous avons conduite sur l'évolution des représentations numériques et leurs interactions chez les enfants de 6 à 9 ans.

Chapitre 8

Le transcodage

Le transcodage est « le passage d'une forme représentée dans un code à sa forme correspondante représentée dans un autre code » (Lochy et Censabella, 2005). Nous avons vu qu'il existe différentes représentations numériques mais, dans la pratique des mathématiques, il n'y a pas de cloisonnement entre les codes. En effet, il est nécessaire dans la plupart des tâches de transcrire une représentation source (d'entrée) en une représentation de sortie. Dans notre système scolaire, l'apprentissage du transcodage se déroule essentiellement à l'école primaire entre 5 et 9 ans. Selon Noël (2005), c'est précisément vers l'âge de 9 ans que l'enfant doit être en mesure de maîtriser le code d'entrée et de sortie.

Au moment où l'enfant se familiarise avec un nouveau type de représentation, une mise en correspondance de la nouvelle représentation avec celle qu'il connaît déjà se produit. Ainsi, lors de l'acquisition des nombres à l'oral, l'enfant est amené à mettre en correspondance le mot-nombre avec sa grandeur. Ensuite, il devra mettre en correspondance les nombres écrits avec leurs représentations verbales orales. Petit à petit, la représentation écrite deviendra autonome vis à vis de la représentation verbale.

D'une manière générale, la difficulté principale du transcodage chez les enfants de 7 ans est liée à la production du nombre et à la maîtrise du système positionnel (Seron et Fayol, 1994). Ainsi, on peut penser que le langage a un rôle à jouer dans le développement des habiletés de transcodages. Nous allons tout d'abord tenter d'expliquer pourquoi.

1. Langage et transcodage

On sait que dans une tâche de comparaison de nombres par exemple, les symboles numériques mobilisent les représentations sur la LNM , comme en témoigne d'ailleurs l'activation synchrone de la région pariétale inférieure qui est le support cérébral de la LNM (Dehaene et Cohen, 1995 ; Dehaene, Piazza, Pinel et Cohen, 2003). On observe également une activation des zones cérébrales impliquées dans la production du langage pour certaines activités numériques (Dehaene, 1997). Ainsi, l'activation des zones cérébrales du langage serait un argument quant à l'implication du langage dans la cognition numérique. Toutefois, selon certains auteurs, c'est le langage en général (*non spécifique aux nombres*) qui serait un important prédicteur des performances numériques (Durand, Hulme, Larking et Snowling, 2005), tandis que d'autres considèrent qu'il n'y a pas de lien entre les deux (Ansari et al., 2003 ; Butterworth, 1999 ; Dehaene et Cohen, 2000).

Les données sur les cas de double dissociation - ainsi que les résultats en faveur de l'existence d'habiletés numériques préverbales - nous permettent de considérer que le langage et les habiletés numériques sont distincts. Selon Butterworth (1999), deux études de cas démontrent que les habiletés numériques peuvent être déficitaires alors que le langage est préservé et inversement. De même pour Dehaene et Cohen (2000), l'étude du patient *Nau* révèle la présence d'une acalculie, d'une alexie et d'un trouble de la compréhension alors que le sujet est en mesure de mobiliser les habiletés d'estimation numérique.

Toutefois l'apprentissage de la lecture et de l'écriture des mots démarre en même temps que celui des symboles des nombres, ce qui amène à s'interroger sur leurs connexions. D'ailleurs, comme nous l'avons exposé dans la première partie de ce travail, une des principales difficultés de la langue française pour énoncer les nombres tient au fait qu'il faut combiner deux primitives lexicales pour exprimer les nombres dit particuliers (à partir de « soixante-dix »). Cette combinaison complexifie d'autant plus la compréhension des mots-nombres pour les enfants français. Ainsi, la structure verbale jouerait un rôle sur le transcodage chez les enfants (Lochy, 2003 ; Seron et Fayol, 1994). Dans leur étude, Seron et Fayol (*Ibid*) montrent que les enfants français font plus d'erreurs que les enfants belges (wallons) pour écrire les nombres comme « soixante quatorze » à cause de la structure verbale du français. Une autre étude de ce type a comparé les performances d'enfants belges francophones et autrichiens (Lochy, 2003). Les résultats indiquent qu'en CP, les enfants autrichiens (qui énoncent d'abord le mot-nombre de l'unité, puis celui de la dizaine) font plus d'erreurs de transcodage (principalement des inversions) que les enfants belges francophones. Ces erreurs se transfèrent sur les nombres à plus de deux chiffres lorsqu'ils sont en cours d'apprentissage, notamment à cause de la généralisation excessive d'une stratégie non adaptée sur ces nombres. De plus, on sait aussi que les troubles langagiers sont une comorbidité fréquente des troubles d'apprentissages numériques. Enfin, le langage est un perturbateur important des tâches numériques spécifiquement auprès des enfants issus de milieux défavorisés. Par exemple, il permet d'expliquer la variabilité de performances en estimation numérique quand les enfants démarrent l'école (Ansari, Donlan, Thomas, Ewing, Peen et Karmiloff-Smith, 2003 ; Praet et Desoete, 2014) mais il n'explique pas le développement de cette compétence.

Plusieurs résultats montrent cependant que l'apprentissage des mots et des chiffres dépend plutôt de processus spécifiques. Il existerait en effet une corrélation non significative à 6 ans entre la capacité à lire des nombres en chiffres et des mots (Seron, Noël et Van der Elst, 1997). De plus, les activités de lecture de mots et de chiffres évoluent différemment comme le montre l'étude de Seron, Van Lil et Noël (1995) dans laquelle les auteurs mesurent les performances à ces tâches à 7 ans durant une année.

De ce fait, les auteurs n'arrivent pas à un consensus. Pour certains, le langage est impliqué dans le traitement des nombres et du calcul (Campbell et Ramey, 1994 ; Spelke et Tsivkin, 2001) tandis que pour d'autres, les effets langagiers sont liés à des traitements annexes (Gallistel et Gelman, 1992 ; McCloskey, 1992). Actuellement, l'hypothèse que le langage est indépendant et spécifique aux nombres est plutôt bien défendue. En parallèle, l'implication du langage ne serait pas le même dans toutes les tâches numériques. Par exemple, il interviendrait dans la construction de la notion de cardinalité dans les mots-nombres (au sens de la connaissance de l'étiquette symbolique) mais l'acquisition de la notion de cardinalité elle-même précéderait le langage.

Nous allons dans le point suivant faire un état de la littérature et des résultats expérimentaux liés aux habiletés de transcodage selon les modalités impliquées et selon la direction de la transcription.

2. Les habiletés de transcodage numérique selon la modalité et la direction de la transcription

2.1. L'activation de la grandeur est-elle automatique ?

Les compétences numériques préverbales qui apparaissent très précocement nous amènent à nous interroger sur le rôle qu'elles jouent dans le développement des connaissances symboliques et des apprentissages chez l'enfant. Sont-elles le support des apprentissages mathématiques ultérieurs ? La représentation analogique est-elle automatiquement activée ? Les habiletés non-symboliques continuent-elles à se développer ?

Le *mapping* analogique/symbolique est un important indicateur de réussite puisque des obstacles dans son développement mènent à d'importantes difficultés d'apprentissages des opérations mathématiques comme l'addition ou la soustraction (Booth et Siegler, 2008 ; Kolkman et al., 2013 ; Siegler et Booth, 2004). Pour réaliser avec efficience une tâche de *mapping* de type

« *number-to-position* » ou de type « *position-to-number* », il est nécessaire d'accéder à l'information numérique sémantique c'est à dire à la grandeur analogique du nombre.

Duncan et McFarland (1980) ont étudié des enfants de l'école maternelle au Collège (âgés de 5,8 à 11 ans en moyenne) au moyen d'une tâche de comparaison symbolique. Selon les auteurs, la présence d'un effet de distance dès 5 ans, validerait l'activation précoce de la grandeur correspondant à un nombre. Toutefois, rien n'indique que cette activation soit réellement automatique. Dehaene et Cohen (1995) ont réalisé une étude en neuro-imagerie dont les résultats vont dans le même sens. Ils observent que dans une tâche de comparaison de deux nombres symboliques (chiffres arabes ou noms écrits des nombres), il n'y a pas de différence dans l'activité même de comparaison selon le type de symbole. Cela est lié au fait que la zone cérébrale activée - la région pariétale inférieure - ne traite pas les nombres dans leur format symbolique mais bien dans un format analogique et de manière automatique. Toutefois, ces analyses ont été conduites auprès d'adultes et nous ne savons rien de leur généralisation auprès d'enfants. De plus, il est dommage de ne pas avoir de données relatives à une tâche de comparaison de deux mots-nombres oraux.

Par la suite, Dehaene, Bossini et Giraux (1993) ont adapté le paradigme de Stroop à une tâche de comparaison numérique. Il s'agit de comparer des paires de chiffres soit sur leur grandeur numérique, soit sur leur taille physique. Selon les paires présentées, les deux dimensions sont congruentes (le plus grand nombre et physiquement plus grand), non-congruente (le plus grand nombre et le plus petit physiquement) ou de taille physique identiques. Les auteurs ont ainsi développé une tâche permettant d'évaluer l'effet de congruité numérique qui indique si l'accès à la quantité se fait de manière automatique et si la correspondance nombre/grandeur s'établit correctement. Ils ont testé ce paradigme auprès d'adultes et ont montré que le traitement de l'information numérique non pertinente était automatique. Girelli, Lucangelli et Butterworth (2000) ont utilisé le même type de tâche en classe de CP. Il semblerait qu'à 6 ans il n'y ait pas encore d'activation automatique de la quantité (Girelli, Lucangelli et Butterworth, 2000 ; Rubinsten, Henik, Berger et Shahar-Shalev, 2002) mais que cela se développerait plutôt à mesure de l'expérience et de la familiarisation avec le code symbolique.

Mais que se passe-t-il plus précisément selon le type de représentation symbolique ? Plusieurs études s'accordent à montrer que de deux à quatre ans, les enfants apprennent à mettre en correspondance une configuration de type dé (arrangement de points) avec un mot-nombre dans les deux directions de transcription (Le Corre et Carey, 2007), les premières correspondances se produisant sur les plus petits nombres (Benoit, Lehalle et Jouen, 2004 ; Wynn, 1990). Entre 3 à 5 ans, les enfants sont en mesure de mettre en correspondance des mots-nombres ou des chiffres et leur position sur une ligne numérique (Berteletti, Lucangeli, Piazza, Dehaene et Zorzi, 2010).

Il est très difficile de savoir si la quantité s'active automatiquement face à un mot-nombre. Avant de savoir quelle cardinalité fait référence à quelle étiquette verbale (Wynn, 1992), il y a plusieurs étapes intermédiaires qu'il faut maîtriser. Le déroulement de ces étapes peut être perturbé par le caractère abstrait du langage numérique oral et par sa structuration linguistique. Le passage par la représentation figurée des doigts faciliterait la mise en correspondance quantité/mot-nombre. De ce fait, l'accès à la représentation symbolique verbale serait facilité et directement automatisé, sans nécessiter l'accès à la grandeur. On sait par ailleurs que les difficultés en calcul entre 6 et 8 ans seraient en lien avec une représentation digitale non verbale évaluée comme défaillante à 5 ans (Fayol, Barrouillet et Marinthe, 1998 ; Marinthe, Fayol et Barrouillet, 2001).

Quant à la représentation numérique écrite, elle semble se mettre en correspondance dans un premier temps avec la représentation analogique (Benoit, Lehalle, Molina, Tijus et Jouen, 2013) et plus tardivement avec les mots-nombres. Il semblerait qu'ensuite le chiffre arabe active la représentation analogique mais seulement dans certains cas. En effet, le traitement serait soit holistique (global, référant à la magnitude), soit plus séquentiel (référant aux principes positionnels), selon la longueur des nombres arabes. Les nombres arabes à deux chiffres activeraient automatiquement la grandeur numérique tandis que les nombres à plus de deux chiffres seraient traités par analyse de la position de chaque chiffres (Brysbaert, 1995 ; Dehaene, Dupoux et Mehler, 1990 ; Dehaene, 1997 ; Ito et Hatta, 2003 ; Poltrock et Schwartz, 1984 ; Reynvoet et Brysbaert, 1999).

En revanche, s'il est montré actuellement que les représentations numériques écrites améliorent la précision des estimations par l'expérience du comptage et du calcul (Booth et Siegler, 2004 ; Siegler et Opfer, 2003 ; Vilette, 2008) il est plus difficile de savoir si les acquisitions numériques verbales orales modifient elles-aussi la représentation analogique.

Ainsi la représentation analogique s'activerait automatiquement face à un nombre symbolique après 6 ans et toujours à l'âge adulte. Cette activation serait également fonction des caractéristiques du nombre : un nombre arabe à plus de deux chiffres est traité sans activer la grandeur. Mais qu'en est-il des transcodages entre nombre symboliques ?

2.2. Le transcodage numérique symbolique

L'enseignement des codes symboliques débute par l'introduction du code verbal oral, et cela avant même l'éducation scolaire au primaire. Au départ, l'apprentissage du code arabe écrit dépend fortement de la représentation orale puisque celle-ci est mobilisée pour apprendre les nombres écrits arabes. Néanmoins, des arguments empiriques peuvent être avancés quant à l'indépendance de ces deux types de représentations (notamment les cas de double-dissociation), ce qui nous laisse penser que le transcodage d'un code à l'autre n'est pas soumis au même développement.

Noël et Turconi (1999) ont étudié les capacités de transcodage dans les tâches de lecture de nombres arabes et d'écriture de nombres sous dictée auprès d'enfant de 6 à 8 ans. Leurs résultats indiquent un décalage temporel dans l'acquisition des habiletés de transcodage selon la taille du nombre concerné. Ainsi, à 6 ans les enfants sont capables de lire et d'écrire correctement les nombres à un chiffre. A 7 ans, ils réussissent pour les nombres à deux chiffres et à 8 ans pour ceux à trois et quatre chiffres.

2.2.1. De la représentation orale à la représentation écrite des nombres

L'écriture sous dictée est une tâche typique qui permet d'évaluer le transcodage de la représentation orale à la représentation écrite. Dans ce type de tâche, il faut analyser les relations entre les mots-nombres. Les erreurs liées à la syntaxe sont plus fréquentes (écrire 2103 au lieu de « deux cent trois ») que les erreurs lexicales (206 pour « deux cent neuf »). Plus spécifiquement, vers 7 ans, les difficultés sont plutôt en lien avec le transcodage des relations de somme et non de produit (Power et Dal Martello, 1990). Pour Power et Dal Martello (*ibid.*), le passage d'une représentation verbale orale à une représentation arabe écrite passe par une étape d'interprétation du mot-nombre suivie d'une étape de construction de la représentation abstraite qui correspond. Cette dernière est en fait une représentation décomposée liée au système verbal. A cet âge, les petits nombres sont bien transcrits mais les difficultés se présentent pour les nombres de trois à quatre chiffres.

Lors des premiers apprentissages, les erreurs sont à la fois syntaxiques et totalement lexicales (10030 au lieu de 130) et chaque élément est considéré comme un nombre isolé. Puis, l'enfant passe à des erreurs syntaxiques et partiellement lexicales (1030 au lieu de 130). Les relations de produit sont ensuite maitrisées avant les relations de somme. Enfin, face à une forme inconnue, les enfants appliquent les règles de transcodages de formes qu'il connaît alors qu'elles ne sont pas adéquates (Seron, Deloche et Noël, 1991), ce qui expliquerait les erreurs.

Les erreurs dans l'écriture sous dictée sont liées à un problème de production de la représentation arabe écrite et non à un problème de compréhension du mot-nombre (Seron et Fayol, 1994). Plus précisément, c'est la longueur phonologique du mot-nombre ainsi que la taille du nombre en chiffre arabe qui pose problème (Fayol, Barrouillet et Renaud, 1996). Ces résultats ont également été observés auprès de jeunes adolescents et suggèrent un rôle majeur de la mémoire de travail dans ce type de transcodage.

2.2.2. De la représentation écrite à la représentation orale des nombres

D'une manière générale, face à un nombre écrit en chiffres, il y aurait lors des premiers apprentissages, un recodage phonologique. Une fois que les règles morphosyntaxiques sont suffisamment intégrées, il n'y a plus de recodage phonologique mais une analyse de la forme écrite du nombre. Néanmoins, comme nous l'avons évoqué plus haut, la comparaison peut nécessiter une activation de la représentation analogique notamment pour les nombres composés de un à deux chiffres (Dehaene, 1997).

La lecture de nombres arabes est une tâche qui permet d'évaluer le transcodage de la représentation écrite à la représentation orale. Pour ce type de tâche, les erreurs syntaxiques sont également plus fréquentes (Power et Dal Martello, 1997 ; Seron, Noël et Van der Elst, 1997). La source principale de difficulté est la longueur du nombre (Fayol, Barrouilet et Renaud, 1996). Les erreurs seraient liées à une utilisation inadaptée des stratégies connues par l'enfant sur des nombres moins complexes (Seron et Noël, 1995).

Une forte corrélation existe entre la lecture de nombres et la compréhension des nombres écrits. Une corrélation entre la lecture de nombres et la production de nombres parlés existe également mais elle est moins puissante (Seron, Noël et Van der Elst, 1997).

En définitive, les difficultés de transcodage symbolique proviennent principalement d'une mauvaise maîtrise de la représentation arabe écrite plutôt que de la représentation verbale orale.

Nous avons explicité le développement des différents types de transcodage à travers les résultats empiriques recueillis depuis plusieurs dizaines d'années. Ces résultats, ainsi que de nombreuses études conduites auprès de patients cérébro-lésés ou d'enfants qui présentent des troubles des apprentissages, ont abouti à l'élaboration de plusieurs modèles théoriques du transcodage que nous allons maintenant développer.

2.3. Les modélisations théoriques du transcodage

On distingue deux types de modèles liés au transcodage. Dans certains modèles, le transcodage d'une représentation à l'autre nécessite l'accès à la représentation analogique (« modèle sémantique » comme celui de McCloskey, Caramazza et Basili, 1985) tandis que d'autres modèles considèrent que l'activation de cette dernière n'est pas nécessaire (modèle asémantique comme celui de Dehaene et Cohen, 1995).

Sans revenir sur le modèle de McCloskey et ses collaborateurs (1985), il est tout de même important de souligner son intérêt dans l'étude du transcodage. Ce modèle sémantique permet en effet de décomposer les étapes réalisées lors du passage d'un codage à l'autre et donc, en utilisant des tâches adaptées, de connaître la source des difficultés (compréhension ou production). Il est toutefois aujourd'hui remis en cause étant donné la possibilité de traitement numérique sémantique.

Power et Dal Martello (1990) ont également proposé un modèle asémantique qui rend compte des transcodages verbaux à écrits. Toutefois, ce modèle ne permet pas de rendre compte de toutes les erreurs ni de prendre en compte la représentation sémantique.

Les arguments en faveur d'un transcodage sémantique reposent sur les observations de patients avec acalculie acquise qui peuvent comprendre et produire des nombres mais pas les transcrire d'une représentation à l'autre. D'autres modèles s'inscrivant dans cette argumentation ont été proposés comme le modèle de Deloche et Seron (1987). Ce dernier suggère qu'il n'est pas nécessaire d'accéder à la représentation de la quantité dans le transcodage mais il ne permet pas de rendre compte de ces aspects du point de vue des apprentissages.

Le modèle ADAPT (A Developmental Asemantic Procedural Transcoding Model) de Barrouillet, Camos, Perruchet et Seron (2004) est le premier modèle à modéliser d'un point de vue développemental le transcodage. Il décrit le passage d'une forme orale à la forme écrite de la manière suivante : la séquence verbale est encodée et stockée au format phonologique, puis après une recherche réussie en mémoire à long terme, la forme écrite peut être transcrite. Dans les cas où la forme écrite n'est pas retrouvée en mémoire à long terme, la séquence est segmentée en unités reconnaissables (*parsing*). Plus les nombres sont fréquemment rencontrés, plus ils sont susceptibles d'être utilisés comme une seule unité. A terme, les formes en chiffres sont alors récupérées directement en mémoire et non plus créées.

Jarlegan, Fayol et Barrouillet (1996) montrent que des enfants scolarisés en CE1 réussissent mieux à transcoder d'un chiffre au mot-nombre d'abord, puis d'un chiffre à son analogie en barre de 10 cubes, et enfin de l'analogie en barre de 10 cubes au mot-nombre. D'après les auteurs, cela suggère qu'un transcodage mot-nombre vers chiffre arabe ne nécessite ni l'accès à une représentation analogique, ni un recodage sémantique. Toutefois, dans cette étude, on peut s'interroger sur la représentation analogique utilisée puisqu'elle nécessite un dénombrement et par conséquent, elle serait plutôt, selon nous une représentation symbolique.

Il convient de considérer le transcodage dans une dynamique développementale, ce qui n'est pas toujours le cas dans les modèles cités plus haut. Ces modèles sont, pour la plupart, issus des observations recueillies auprès d'adultes. Pourtant, il est nécessaire de distinguer le fonctionnement adulte du développement des acquisitions numériques durant l'enfance et l'adolescence.

Les modèles et les études empiriques menées sur le développement des habiletés de *mapping* et de transcodage laissent néanmoins encore beaucoup de questions en suspens que nous allons maintenant détailler.

2.4. Les questions en suspens

L'étude des habiletés d'estimation numérique s'est souvent attachée à analyser les liens entre l'estimation de la grandeur d'un nombre arabe écrit ou l'estimation de la valeur d'une quantité. De même, les relations entre ces compétences et les habiletés mathématiques sont fréquemment considérées. En revanche, il n'y a que peu d'études qui portent sur les nombres verbaux ou les capacités d'estimation de ces derniers. Pourtant, et nous l'avons développé en introduction, la représentation orale est le premier code numérique auquel l'enfant est confronté. Les premières correspondances avec les grandeurs se font dans la direction de l'analogique vers l'oral et inversement en parallèle au cours du développement. Puis, les correspondances se précisent et se complexifient avec l'ajout des représentations écrites, puis celui des mises en correspondances entre les codes symboliques.

2.4.1. Le rôle des représentations symboliques et non-symboliques dans les acquisitions mathématiques

Une question importante est de mieux cerner le poids des habiletés symboliques et non-symboliques dans le développement du *mapping* puisque cette dernière est mobilisée dans presque toutes les tâches numériques et qu'elle est indispensable pour des apprentissages efficients. Pour certains auteurs, les deux compétences seraient nécessaires (Gilmore et al., 2010), tandis que d'autres privilégient les habiletés non-symboliques (Dehaene, 2001) ou le rôle des connaissances symboliques (De Smedt et Gilmore, 2011).

Pour Dehaene (2001), les connaissances liées à la représentation analogique permettent de donner du sens aux symboles numériques. Selon ce principe, les compétences non-symboliques auraient un impact important sur les capacités de *mapping* (Dehaene, 2001 ; Von Aster et Shalev, 2007). Pour d'autres, les compétences symboliques viennent faciliter le *mapping* en ajustant les habiletés non-symboliques. Les arguments qui défendent la nécessité du symbolique proviennent d'études longitudinales qui ont montré l'importance du symbolique sur le non-symbolique (Krajewski et Schneider, 2009 ; Le Corre et Carey, 2007 ; LeFevre, Fast, Skwarchuck et al. , 2010 ; Lipton et Spelke, 2005).

Trois études récentes ont été conduites afin d'apporter des arguments empiriques à ce débat. Praet et Desoete (2014) ont observé les changements développementaux dans l'acuité d'estimation numérique de nombres oraux, écrits ou de quantités. Pour cela, ils ont demandé à 132 enfants de situer un nombre dans chacune de ces trois modalités sur une ligne numérique bornée de 0 à 100. Ils étaient également évalués quant à leur niveau intellectuel et leurs compétences langagières. De la maternelle à l'équivalent du CP, les élèves sont suivis durant environ 2 ans et demi et testés à 5 reprises. Les résultats montrent que les erreurs d'estimation sur la ligne 0-100 diminuent avec l'âge et l'éducation formelle pour les trois modalités utilisées, bien que l'effet soit moins fort en fin de CP. De plus, la précision d'améliore avec l'âge dans les trois modalités, évoluant d'une représentation logarithmique à une représentation linéaire d'ici la fin du CP. Toutefois, l'évolution vers un tracé linéaire est plus tardive quand il s'agit des nombres oraux (à quelques mois près).

Les résultats de cette étude sont très intéressants et justifient d'autant plus notre intérêt pour cette problématique. Toutefois, et puisque le nombre prend son sens par mise en correspondance avec sa grandeur et conjointement par correspondance inverse, ils ne permettent pas d'analyser de manière suffisamment fine l'évolution des traitements numériques avec l'âge. De plus, un effet d'entraînement n'est pas à déconsidérer étant donné que les nombres que les enfants doivent situer sont les mêmes aux cinq temps de mesure.

Une autre étude a été réalisée par Kolkman et ses collaborateurs (2013) chez des enfants de 4 à 6 ans afin de mieux comprendre le développement des compétences symboliques, non-symboliques et du *mapping*. Leurs résultats sont en faveur des interprétations de Dehaene (2001), avec un développement distinct des compétences non-symboliques, symboliques et de mapping chez les plus jeunes enfants, puis d'une intégration vers 6 ans. Cela indique qu'à 6 ans, les enfants sont en mesure de mettre directement en correspondance un nombre et sa grandeur analogique. De plus, les auteurs observent que les compétences symboliques auraient un effet sur les compétences non-symboliques et sur le *mapping* mais non l'inverse.

Benoit, Lehalle, Molina, Tijus et Jouen (2013) considèrent (comme nous !) qu'il est important d'étudier les compétences de *mapping* entre mots-nombres, chiffres arabes ou quantités de manière bilatérale. Ils étudient ces représentations (de 1 à 6) et leurs relations entre 3 et 5 ans. Leurs résultats indiquent que pour les quantités 1 à 6, dès l'âge de 3 ans, le *mapping* entre une configuration de points et un mot-nombres est effectif dans les deux directions. A 4 ans, les enfants sont en mesure de mettre en correspondance des configurations de points avec des mots-nombres et des chiffres arabes dans les deux directions sans différence. Enfin, à 5 ans, les enfants réussissent parfaitement toutes les mises en correspondance proposées dans l'étude. Les enfants semblent ainsi apprendre à mettre en correspondance quantité et mot-nombre d'abord, puis ils acquièrent le *mapping* quantité/chiffre arabe entre 3 et 4 ans et le *mapping* mot-nombre/chiffre arabe entre 4 et 5 ans pour les numérosités 1 à 6. Un résultat fort intéressant de cette recherche est que les enfants réussissent plus facilement à mettre en correspondance une représentation analogique et une représentation symbolique plutôt que deux représentations symboliques entre-elles. La représentation analogique et le *mapping* entre ces deux représentations joue ainsi un rôle crucial dans l'acquisition des chiffres arabes et dans la mise en correspondance entre nombres symboliques.

Les résultats issus des études de Kolkman ou Benoit et leurs collaborateurs permettent d'apporter un éclairage sur le développement précoce des différentes habiletés et le rôle du *mapping* ; ils restent cependant insuffisants. En effet, les auteurs s'intéressent aux compétences symboliques avant même qu'elles ne soient réellement acquises puisque la plupart des apprentissages numériques symboliques se déroulent dans les premières années de l 'école primaire. De plus, aucun de ces auteurs ne prend en compte les compétences spécifiques à chaque représentation et leur apparition au cours du développement, relativement au développement de chaque type de *mapping*. Enfin, le champ numérique de l'étude de Benoit et ses collaborateurs est inférieur à 6 alors que l'on sait que les processus de traitement numériques varient selon la longueur du nombre (traitement holistique jusqu'à 2 chiffres). De même, ce champ numérique est proche des limites du *subitizing* et il est possible que certaines tâches administrées relèvent de processus distincts.

L'objectif de notre étude est de mieux comprendre ce qui se produit lorsque se mettent en place à l'école les principaux apprentissages symboliques sur les nombres. Nous étudierons donc le développement de ces capacités entre 6 et 9 ans, et dans les deux directions de mise en correspondance. Même s'il n'y a pas de raison de penser que la correspondance « grandeurs ➔ symboles » se mette en place plus précocement que la correspondance inverse « symboles ➔ grandeurs », nous pensons qu'il est possible qu'avec l'augmentation du champ numérique et de la complexité des activités mathématiques, le *mapping* à l'oral soit temporellement décalé de celui à l'écrit. En effet, que ce soit à l'oral comme à l'écrit, les compétences d'estimation numérique semblent indépendantes de la modalité utilisée. Néanmoins, il y aurait un décalage dans la précision de la représentation des nombres oraux comparativement aux deux autres modalités. La représentation orale continue-elle de s'affiner et de préciser ses correspondances avec la représentation analogique après les premières acquisitions de la représentation arabe ?

2.4.2. Le traitement symboliques des nombres et son évolution avec la complexité des activités

Un second questionnement concerne l'évolution des traitements symboliques numériques. La littérature fait état d'un développement des compétences verbales orales d'abord, puis des compétences écrites pour les nombres inférieurs à 6 (Benoit et al., 2013), ou des nombres jusqu'à 100 mais seulement dans une direction de traitement. Pourtant, le développement des habiletés arithmétiques n'est toujours pas clairement établi pour les numérosités plus importantes, au moment crucial où elles sont enseignées à l'oral mais surtout à l'écrit (de 6 à 8 ans principalement). De même, nous n'avons pas de données suffisantes concernant l'évolution propre à chaque code et pour chaque direction de mise en correspondance.

L'étude de Van Loosbroek, Dirkx, Hulstijn et Janssen (2009) s'intéresse au transcodage des nombres de l'oral à l'écrit auprès d'enfants de 9 ans avec ou sans trouble en mathématique. Ils observent que chez les enfants qui présentent des difficultés, le temps mis pour écrire les nombres dictés est différent en fonction de la taille de ces derniers. Ce résultat est en faveur de l'existence de deux routes sémantiques différentes pour les nombres inférieurs et supérieurs à 10. Chez les enfants tout-venants, l'absence de différence dans le temps de planification de l'écriture en fonction de la taille des nombres est en faveur d'un accès direct non sémantique. Il y aurait donc un décalage dans l'acquisition et le développement d'un transcodage direct et rapide pour les élèves en difficultés. Nous pensons qu'il est probable que les enfants typiques plus jeunes, entre 6 et 9 ans, se trouvent dans la même situation que les élèves en difficultés décrits par Van Loosbroek et collaborateurs. En effet, puisque le *mapping* entre l'oral et l'écrit des nombres a lieu plus tardivement que les autres types de *mapping*, nous pensons que les enfants plus jeunes peuvent avoir recourt à deux stratégies différentes selon la taille du nombre à transcrire. Pour les nombres inférieurs à 10, plus fréquemment rencontrés, le transcodage pourrait être automatisé avec une activation sémantique instantanée, car les petits nombres sont bien connus et maitrisés. Pour les nombres supérieurs à 10, le transcodage pourrait être indirect et nécessiter un recodage analogique et sémantique plus ou moins long avant sa retranscription écrite.

Nous manquons également de données relatives au traitement oral des nombres. En effet, par exemple, il n'y a quasiment jamais de tâche de comparaison de deux nombres à l'oral. La plupart des tâches utilisées se réfèrent à l'écrit ou à la représentation analogique.

Le modèle de Dehaene et Cohen (1995 ; 2000) est à l'heure actuelle le modèle qui rend le mieux compte de la complexité des représentations et des activités numériques. Il permet notamment de rendre compte de difficulté spécifiquement liées à un type de représentation puisqu'il envisage certains traitements numériques comme étant indépendant du langage. Mais il suggère également que le code verbal est très important dans certains traitements numériques. Selon ce modèle, une mise en correspondance directe entre chacun des trois codes est possible. Toutefois, comme nous l'avons déjà évoqué, ce modèle ne rend pas compte de la dynamique développementale complexe qui s'établit lors de l'apprentissage des différentes représentations ni de leurs interactions.

Mundy et Gilmore (2009) ont évalué les performances de *mapping* bidirectionnelles chez des enfants tout-venants de 6 à 8-9 ans. Leurs résultats indiquent, outre une représentation plus précise des nombres pour les enfants plus âgés, des représentations plus précises dans le *mapping* non-symbolique vers symbolique et inversement. Les auteurs ont également administrés aux enfants une tâche de comparaison numérique symbolique (nombre arabe) et une tâche de comparaison non-symbolique. Les résultats montrent que les enfants sont plus précis dans la tâche de comparaison symbolique mais sans différence dans les temps de réaction. Toutefois, leur recherche assimile les représentations symboliques numériques à l'oral avec celles de l'écrit dans la tâche de *mapping* bidirectionnelle, ce qui ne permet pas de rendre compte précisément des habiletés de mise en correspondance entre représentations numériques. De même, la tâche de comparaison symbolique n'utilise que des nombres arabes et pas de mots-nombres. Enfin, l'étude ne spécifie pas le développement de ces compétences de 6 à 8 ans. Nous considérons qu'il est pertinent d'étudier les capacités de comparaison et de mises en correspondance bidirectionnelles entre les codes numériques de 6 à 8-9 ans en distinguant la représentation orale et écrite puisqu'elles se développent séparément.

Le nombre verbal est utilisé très tôt par l'enfant qui ne sait pas encore précisément à quoi il réfère mais sait déjà l'utiliser dans différents contextes. Nous pensons que c'est sur la base des connaissances non symboliques précoces et de la pratique de l'oral des nombres que les apprentissages formels à l’école élémentaire viennent se greffer. Mais quel peut être le poids de l’oral dans les apprentissages mathématiques ? Que se passe-t-il lors des premiers apprentissages à l’écrit ? Dans quelle mesure l’entrée dans l’écrit peut-elle favoriser les apprentissages ? L’oral et l’écrit évoluent-ils en parallèle et tout au long de la scolarité CP/CE2 du point de vue des connaissances arithmétiques ? L’étude du développement de ces différentes représentations et des habiletés de mise en correspondance nous permettrait de mieux comprendre comment les acquisitions numériques se déroulent. En outre, nous saurions alors également sur quelles représentations il est préférable de centrer l’entraînement à l’estimation numérique.

Chapitre 9

Etude développementale des codes symboliques et non-symboliques ainsi que de leurs interactions de 6 à 9 ans

1. Cadre général et hypothèses

Comme nous l'avons exposé dans l'introduction, les différentes représentations s'installent et s'enrichissent au fur et à mesure du développement. Cela paraît évident et pourtant, les études expérimentales sur l'évolution de chaque type de représentation, et sur la manière dont elles interagissent au fur et à mesure du développement, sont rares. Jusqu'à présent, ces études se sont attachées aux différents systèmes de traitement sans nécessairement chercher à étudier leurs relations développementales. Nous considérons que ces études sont insuffisantes car la dynamique qui doit s'établir entre ces représentations nous échappe. L'acquisition du langage joue également un rôle dans l'acquisition des nombres et leur manipulation ; il est donc essentiel de prendre en compte l'évolution de ce domaine conjointement à celui des mathématiques.

Les codes symboliques s'exprimant sous différentes formes (orale, écrite en chiffres ou écrite en lettres), nous nous intéressons à la mise en correspondance entre le code non symbolique et les codes symboliques (oral et écrit en chiffres). En effet, nous supposons que l'intégration du sens des nombres et du calcul - si elle se fait indubitablement à l'écrit - nécessite un effort supplémentaire dépendant d'un cadre d'apprentissage différent pour l'oral. A l'oral, les nombres possèdent en effet leurs caractéristiques propres qui sont différentes de celles de l'écrit.

L'objectif de la présente recherche est donc d'étudier l'évolution des traitements numériques analogiques, oraux et écrits, et de leur interaction entre 6 et 9 ans. Plusieurs interrogations et hypothèses sont soulevées :

(1) Nous souhaitons tout d'abord savoir, dans le développement typique, comment les différentes représentations évoluent de 6 à 9 ans lorsqu'elles sont sollicitées dans les apprentissages. Toutes les représentations se développent-elles dans le même sens quel que soit l'âge ? avec la même intensité ? Le code analogique, fondement de la sémantique des nombres et présent très précocement, poursuit-il son développement après 6 ans? Nous allons ainsi étudier, à travers trois tâches mobilisant un type spécifique de représentation, leur évolution entre 6 et 9 ans. Nous faisons l'hypothèse que les trois types de représentation se développent avec l'âge (Benoit et al., 2013 ; Mundy et Gilmore, 2009 ; Van Loosbroek et al., 2009) mais que ce

développement est plus accentué pour la représentation écrite (Jarlegan, Fayol et Barrouillet, 1996 ; Praet et Desoete, 2014). On s'attend donc aussi à ce que la représentation analogique se développe jusqu'à 9 ans (Chillier, 2002 ; Dehaene et al., 1993 ; Girelli, Lucangelli et Butterworth, 2000 ; Huntley-Fenner, 2001 ; Rubinsten, Henik, Berger et Shahar-Shalev, 2002).

(2) Nous souhaitons également étudier l'évolution des performances de transcodages entre les représentations numériques symboliques de 6 à 9 ans. Pour cela, nous allons mettre en rapport les capacités de transcodages numériques de la représentation orale à la représentation écrite, et inversement. Les capacités de lecture et de dictée de nombres évoluent-elles de la même manière avec l'âge et selon la taille des nombres ? Nous supposons que les performances entre 6 et 9 ans doivent évoluer de manière différenciée selon la taille du nombre et selon la direction du traitement (Benoît et al., 2013 ; Van Loosbroek et al., 2009). De plus, nous pensons que les compétences de lecture de nombres seront supérieures à celles de dictée de nombres et que la transcription de l'écrit vers l'oral s'acquière plus précocement que celle de l'oral vers l'écrit (Praet et Desoete, 2014).

(3) Nous souhaitons analyser l'évolution des performances de *mapping* de 6 à 9 ans entre les représentations analogiques et les représentations symboliques. Les capacités de mises en correspondance sont-elles similaires selon la direction du traitement ? Observe-t-on des différences selon la modalité de la représentation symbolique ? Nous posons l'hypothèse que le *mapping* symbolique → analogique se développe avant le *mapping* analogique → symbolique, notamment dans la modalité écrite. Cette hypothèse se base principalement sur le contenu des programmes scolaires en mathématiques. L'apprentissage des petits nombres se fait généralement par mise en correspondance d'une quantité avec une représentation symbolique. Après ces premières manipulations, le lien entre analogique et symbolique n'est que très rarement réalisé. Ainsi, le *mapping* symbolique → analogique se développerait davantage à l'âge scolaire car il serait la conséquence des apprentissages numériques exacts et symboliques (Booth et Siegler, 2004 ; Siegler et Opfer, 2003 ; Vilette, 2008). Nous pensons que le *mapping* analogique → symbolique s'optimise et se fluidifie plus tardivement, grâce à l'amélioration de la précision de la représentation analogique (Berch, Foley, Hill et Rayan, 1999 ; Girelli, Lucangeli et Butterworth, 2000). Plus précisément, ce serait principalement la capacité à mettre en correspondance de manière exacte et l'écart-moyen des réponses qui évolueraient de 6 à 9 ans.

(4) Enfin - sur la base du modèle de Dehaene et Cohen (1995 ; 2000) sur lequel nous basons notre méthodologie - ces résultats devraient nous permettent de mieux cerner le développement des différentes représentations et leurs interactions au cours des trois premières années de scolarisation primaire. Nous nous attendons ainsi à une interaction complexe des représentations symboliques selon les tâches sollicitées et selon l'âge des participants.

2. Participants

Trois classes issues de deux écoles du Nord-Pas-de-Calais participent à cette étude. Dans chaque classe, l'enseignant applique son programme habituel d'enseignement mathématique dans le respect des instructions officielles de 2008. Aucune des classes n'a participé durant l'année à un programme scolaire atypique ou à une recherche de terrain en lecture ou en mathématique.

Notre échantillon est constitué au total de 41 élèves scolarisés du CP au CE2 (14 CP ; 13 CE1 et 14 CE2). L'âge moyen est de 6 ans 6 mois au CP ; de 7 ans 7 mois ans au CE1 et de 8 ans 6 mois au CE2. Trois groupes sont donc constitués (cf. Tableau 5)

Notre objectif est de rendre compte de l'évolution des traitements numériques au cours du développement typique. Ainsi, les participants sont des élèves typiques de leur niveau de classe ayant suivis une scolarité normale (pas de scolarité tardive ou interrompue, pas de redoublement ou de diagnostic de troubles du développement ou des apprentissages). Précisons toutefois que tous les élèves de chaque classe ont pu participer à une session de jeu sur l'"Estimateur" à la fin de l'étude.

Préalablement à l'expérimentation, les élèves et leurs parents ont tous reçu une lettre d'information ainsi qu'un formulaire de consentement de participation à l'étude.

	MOYENNE	**MIN**	**MAX**	**Ecart-type**
6-7 ans	6,6	6	7,1	0,29
7-8 ans	7,7	7,4	8,1	0,27
8-9 ans	8,6	8,2	9	0,31

Tableau 5. Ages de la population étudiée

3. Matériel et méthode

Au total, 9 épreuves ont été administrées à tous les participants. Chacune des épreuves a été choisie et conçue afin d'évaluer le traitement spécifique à chaque représentation ou une relation déterminée entre la représentation orale, écrite et/ou analogique (cf. Figure 26). Un cahier de passation a été construit (cf. Annexe E et F) pour faciliter l'évaluation.

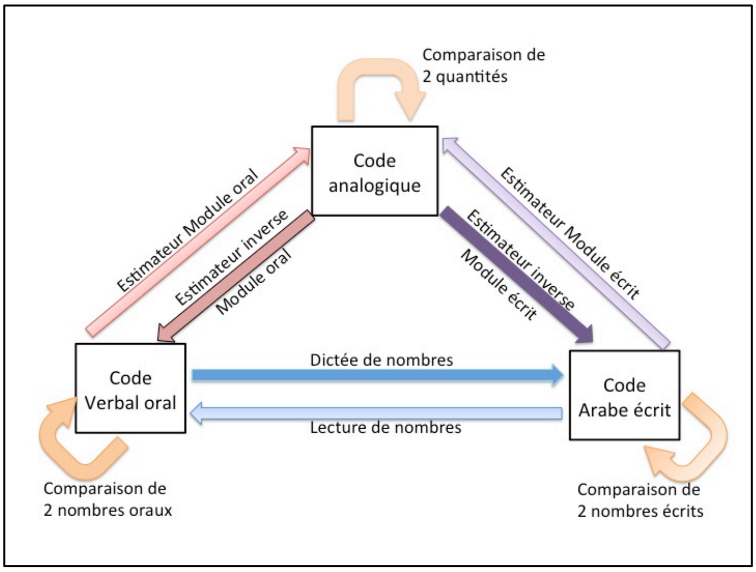


Figure 26. Représentation schématique des épreuves en fonction des codes mobilisés et de la direction du traitement

3.1. Evaluation des performances propres à chaque représentation

Afin d'évaluer les performances propres à chaque code, nous avons élaboré trois épreuves qui mobilisent essentiellement un seul type de représentation. Ces épreuves permettent d'évaluer la compréhension des nombres en fonction de la modalité utilisée.

Comparaison relative de deux quantités (Vilette, 2008)

Il s'agit d'une épreuve informatisée qui évalue les compétences de comparaison analogique de deux quantités et permet ainsi de mesurer l'acuité du « sens du nombre ». Ici, seul le code analogique est impliqué. Cette épreuve a déjà été utilisée dans nos études précédentes.

L'épreuve est individuelle et la passation dure environ 5 minutes. On présente au participant très rapidement (1 sec) deux quantités différentes de carrés de chaque côté de l'écran. L'enfant doit choisir de quel côté il y a le plus de carrés en appuyant sur une touche du clavier (gommette verte pour la gauche et gommette bleue pour la droite). Avant chaque essai, un point de fixation apparaît à l'écran pour focaliser l'attention. Un masque apparaît également après la présentation des quantités pour éviter la persistance de l'image sur la rétine. Chaque élève réalise au moins deux essais de familiarisation pour vérifier sa compréhension des consignes puis il réalise la phase de test avec 48 paires à comparer. Ici, les quantités à comparer varient de 10 à 22. La taille des carrés présentés pour chaque quantité ainsi que leur densité sont contrôlées au préalable. Les quantités apparaissent aléatoirement en fonction des participants avec un écart entre les quantités qui varie de 1 à 6.

Nous obtenons un pourcentage moyen de réussite que nous pouvons également analyser en fonction de l'écart entre les deux quantités présentées.

Comparaison de deux nombres à l'oral (Epreuve « Comparateur oral », Figure 27)

Il s'agit d'une épreuve informatisée qui évalue les compétences de comparaison symbolique de deux nombres entendus à l'oral. Cette épreuve mobilise surtout le code verbal oral mais il est possible que le code analogique ou le code arabe écrit soient également activés pour comparer les nombres. Cette épreuve est inspirée de l'épreuve du même nom dans le ZAREKI-R mais a été adaptée avec une taille de nombre supérieure et davantage d'items.

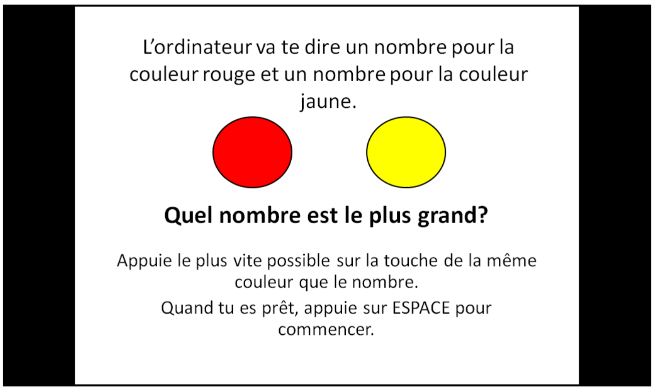


Figure 27. Début de l'épreuve « Comparateur oral » avec la consigne.

L'élève entend deux nombres à la suite et doit indiquer le plus vite possible sans se tromper, quel est le nombre le plus grand (Figure 28). Simultanément à la prononciation des nombres par l'ordinateur, un rond rouge à gauche et un rond jaune à droite apparaissent. Le nombre entendu en premier correspond au rond rouge et donc à la gommette rouge du clavier située à gauche et le second correspond au rond jaune et à la gommette jaune située à droite.

Afin de recentrer l'attention de l'élève un son est présenté avant chaque essai. Quelques essais d'entraînement sont réalisés, puis on présente 20 paires à comparer en phase test. Au préalable le sens de la réponse (droite ou gauche) a été contrôlé, ainsi que la taille des nombres à comparer, la longueur phonologique de chacun, leur fréquence et leur familiarité (Annexe F).

Nous enregistrons ainsi un pourcentage moyen de comparaisons correctes ainsi que le temps de réaction moyen. On peut *a posteriori* distinguer les comparaisons selon la distance entre les deux nombres (faible, moyenne ou importante)~~.~~ Ces distinctions permettront d'analyser l'existence d'un effet de distance et de grandeur dans une tâche comparaison de deux nombres à l'oral.

Nous pouvons alors calculer le pourcentage moyen de comparaisons correctes selon le ratio ainsi que le temps de réaction moyen associé.

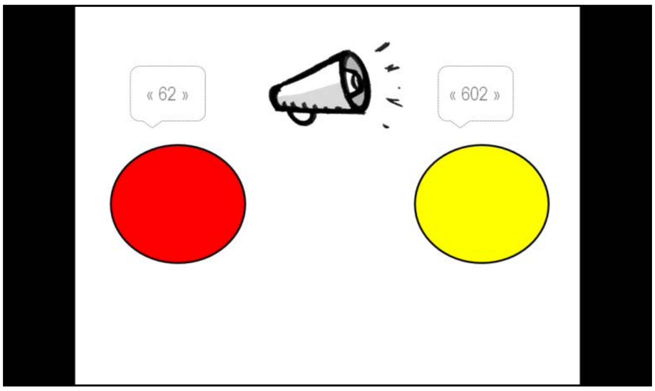


Figure 28. Exemple d'items à l'épreuve « Comparateur oral »

<u>Comparaison de deux nombres à l'écrit (Epreuve « Comparateur écrit », Figure 29).</u>

Cette épreuve est l'équivalent de l'épreuve précédente mais en modalité écrite. Nous évaluons ici principalement les performances du code arabe écrit mais il est probable que le code analogique soit pour certains élèves activés pour répondre.

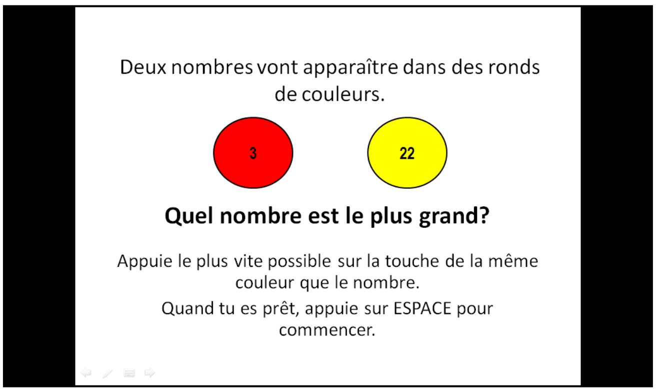


Figure 29. Début de l'épreuve « Comparateur oral » avec la consigne.

On présente deux nombres à l'écrit : l'un dans un rond rouge à gauche et l'autre dans un rond jaune à droite et on demande à l'enfant de décider quel nombre est le plus grand (Figure 30). L'élève doit cliquer sur la gommette de la même couleur que le nombre le plus grand aussi vite que possible en évitant de se tromper. Afin de recentrer l'attention de l'élève un son est présenté avant chaque essai. Quelques essais d'entraînement sont réalisés, puis on présente 20 paires à comparer en phase test. On a contrôlé et fait varier au préalable le côté de la réponse attendue, la taille des nombres à comparer, la longueur phonologique de chacun, ainsi que sa fréquence et sa familiarité (Annexe F).

Nous enregistrons ainsi un pourcentage moyen de comparaisons correctes ainsi que le temps de réaction moyen. On peut, a posteriori, distinguer les comparaisons selon la distance entre les deux nombres (faible, moyenne ou importante)~~.~~ Ces distinctions permettront d'analyser l'existence d'un effet de distance et de grandeur dans une tâche comparaison de deux nombres à l'écrit. Nous pouvons alors calculer le pourcentage moyen de comparaisons correctes selon le ratio ainsi que le temps de réaction moyen associé.

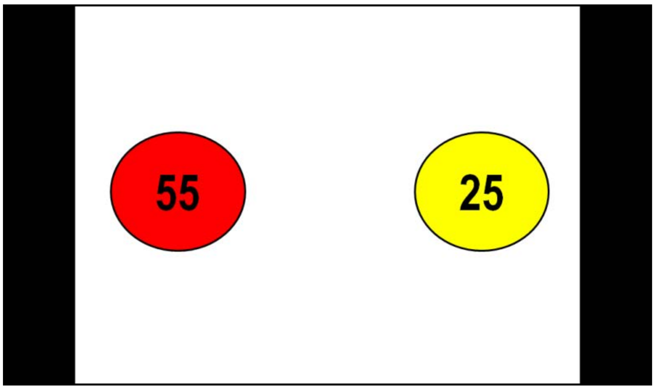


Figure 30. Exemple d'item à l'épreuve « Comparateur oral ».

3.2. Evaluation des performances de transcodage oral/écrit

Nous avons ensuite administré des épreuves permettant d'évaluer les transcodages entre toutes les représentations de manière bilatérale. Deux épreuves classiques ont été utilisées pour évaluer les performances de transcodage du code oral au code écrit : la lecture de nombre et la dictée de nombre (Annexe E).

La lecture de nombres

Cette épreuve permet d'évaluer le transcodage entre les nombres symboliques, du code arabe écrit (entrée) au code verbal oral (sortie). Il permet d'apprécier le déchiffrage de l'écrit et la transcription en sons. Cette épreuve s'inspire d'une épreuve similaire du ZAREKI-R.

On présente à l'élève une feuille avec 25 nombres arabes réguliers ou particuliers dont la fréquence, la longueur et la grandeur varient. L'élève lit chaque nombre à voix haute, comme il pense que c'est juste.

Nous enregistrons un pourcentage de réussite total à partir du nombre de réponses correctes que nous pouvons décliner selon la taille du nombre.

La dictée de nombres

Dans cette épreuve, nous évaluons le transcodage du code verbal oral (entrée) au code arabe écrit (sortie) et la capacité des élèves à traduire les sons en chiffres symboliques. Il s'agit également d'une épreuve inspirée du ZAREKI-R.

On dicte à l'élève 25 nombres réguliers ou particuliers dont la fréquence et la taille sont contrôlées. L'élève doit les noter comme il pense sur une feuille blanche.

Nous enregistrons un pourcentage de réussite total à partir du nombre de réponses correctes que nous pouvons décliner selon la taille du nombre.

3.3. Evaluation des performances de *mapping* analogique/écrit

Nous avons également administré deux épreuves pour mesurer les capacités de *mapping* du code entre le code analogique et le code verbal écrit.

Epreuve "Estimateur" (type number-to-position *en modalité écrite)*

Les épreuves de *number-to-position* visent à objectiver les capacités des participants à mettre un correspondance un nombre et sa position estimée sur une longueur (format analogique).

L'"Estimateur", que nous avons décrit et utilisé dans les études précédentes, a été employé ici également afin d'évaluer cette compétence. Il sollicite l'interaction entre les représentations numériques symboliques exactes (nombre arabe écrit) et leurs représentations analogique sur la ligne numérique (Vilette & Schneider, 2011). Ici, nous évaluons bien le *mapping* entre la représentation arabe écrite et la représentation analogique (Figure 31).

Pour rappel, l'élève doit situer la position d'un nombre sur une ligne de réponse bornée non graduée. Chaque élève réalise 20 items test. Les nombres présentés vont de 0 à 100 et sont générés aléatoirement par le logiciel. Chaque nombre reste affiché le temps que l'élève donne sa réponse en cliquant sur la position qu'il estime correspondre au nombre.

Nous obtenons ainsi un pourcentage moyen de réponses exactes, un pourcentage d'estimations approximatives (avec plus ou moins 10% de précision), ainsi que l'écart moyen entre le nombre présenté et la position indiquée sur la ligne.

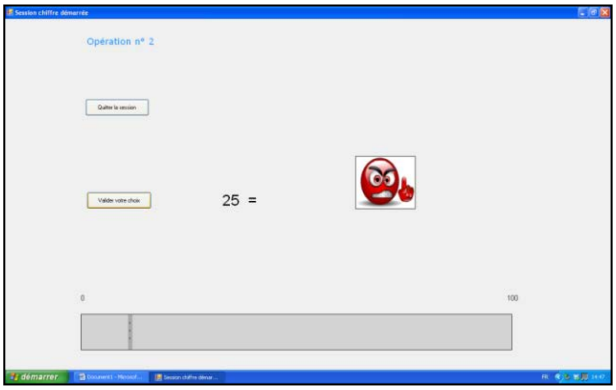


Figure 31. Exemple d'item à l'épreuve "Estimateur" en modalité écrite.

__Epreuve "Estimateur" Inverse (type position-to-number en modalité écrite).__

Ici, nous utilisons à nouveau le logiciel "Estimateur" mais dans une version adaptée spécifiquement pour ce travail qui est l'"Estimateur" Inverse. Cette épreuve nous permet d'évaluer les compétences de *mapping* entre une position analogique sur une ligne et un nombre symbolique, c'est à dire dans le sens inverse de l'épreuve "Estimateur" classique. Dans la modalité écrite, nous nous intéressons plus particulièrement au *mapping* entre la représentation analogique et la représentation arabe écrite (Figure 32).

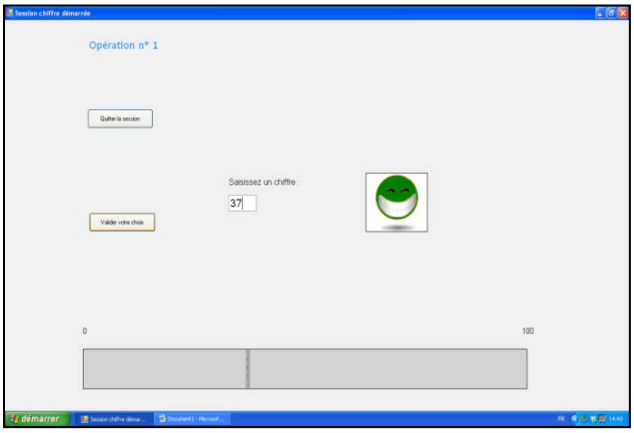


Figure 32. Exemple d'items à l'épreuve "Estimateur" Inverse en modalité écrite

Pour chaque item, le logiciel génère automatiquement une position sur la règle numérique bornée de 0 à 100. L'élève doit écrire sur le clavier le nombre qu'il pense correspondre à cette position. Au total, 10 items sont présentés à l'élève et il ne peut pas recommencer. La précision attendue est de 10%.

Nous recueillons un pourcentage moyen de réussite, un pourcentage moyen d'estimations approximatives ainsi que l'écart moyen entre la position et le nombre donné par l'élève.

3.4. Evaluation des performances de *mapping* analogique/oral

Pour évaluer les performances de *mapping* entre la représentation analogique et le code verbal oral, nous avons adapté deux épreuves au sein du logiciel "Estimateur".

Epreuve "Estimateur" (type number-to-position *en modalité orale)*

Il s'agit de la même épreuve que celle décrite précédemment mais dans la modalité orale. Nous évaluons les capacités de *mapping* entre un nombre présenté à l'oral (code verbal oral) et sa correspondance numérique analogique (code analogique) sur une ligne numérique bornée (Figure 33).

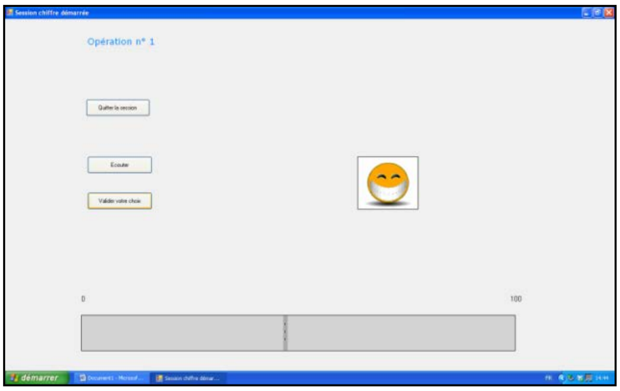


Figure 33. Exemple d'item à l'épreuve "Estimateur" en modalité orale

Le logiciel génère automatiquement un nombre de 1 à 100 qu'il va énoncé oralement dès que l'élève clique sur « Ecouter ». Il doit alors situer ce nombre sur une règle bornée de 0 à 100 avec une précision de plus moins 5 (10%). Il réalise 20 essais et ne peut pas recommencer en cas d'erreur.

Nous enregistrons un pourcentage moyen de réponses exactes, un pourcentage d'estimations approximatives et l'écart moyen entre l'item et la réponse.

Epreuve "Estimateur" Inverse (type position-to-number en modalité orale).

Cette épreuve est identique à celle présentée plus haut mais la réponse demandée à l'élève est orale. On évalue le *mapping* entre une position indiquée sur la règle numérique bornée de 0 à 100 (code analogique) et la représentation verbale orale.

Le logiciel génère aléatoirement à chaque essai la position d'un nombre allant de 1 à 100. L'élève énonce oralement quel nombre peut représenter cette position. L'expérimentateur enregistre la réponse sur le logiciel. L'élève réalise au total 10 essais.

Nous obtenons un pourcentage moyen de réussite, un pourcentage moyen d'estimations approximatives et l'écart moyen entre les positions et les réponses données par l'élève.

4. Procédure

Les évaluations ont eu lieu à la fin du second trimestre de l'année scolaire. Cette période d'évaluation a été choisie car il était indispensable d'évaluer tous les enfants au même moment de l'année pour éviter tout décalage en raison de la rapidité d'évolution des savoirs et des apprentissages à cette période. De plus, avant le mois de février, les enfants de CP sont au cœur de l'apprentissage en lecture. Nous avons donc préféré les évaluer après cette période afin de réduire les différences individuelles liées aux différences inter-individuelles d'apprentissage de la lecture. Enfin, nous ne voulions pas évaluer les enfants en fin d'année scolaire de manière à étudier ce qui se passe juste après la phase cruciale d'apprentissage de l'écriture.

Les passations ont été réalisées par deux expérimentateurs entraînés pour ce protocole afin d'homogénéiser leur déroulement. La succession des épreuves se faisait de manière contrebalancée entre les enfants afin de ne pas toujours réaliser une épreuve d'abord dans la modalité orale, puis dans la modalité écrite, et ainsi de contrôler d'éventuel biais d'ordre de passation.

Chaque évaluation est réalisée en deux temps pour une durée totale d'environ une heure :

- un temps d'évaluation individuel dans une salle calme et isolée ; on réalise alors l'épreuve de lecture et dictée de nombres ainsi que l'"Estimateur" Inverse (oral et écrit).
- un temps d'évaluation collective par groupe de 5 élèves en salle informatique ; les épreuves réalisées sont le Comparateur (oral et écrit), l'"Estimateur" (oral et écrit) et l'épreuve de Comparaison relative de deux quantités.

5. Résultats

5.1. Performances à la tâche de comparaison relative de quantités

5.1.1. Statistiques descriptives

Intéressons nous d’abord au pourcentage moyen de réponses correctes à la tâche de comparaison relative. Le Tableau 7 semble indiquer qu’en moyenne quel que soit le groupe considéré, les performances à la tâche de comparaison relative de quantités sont similaires et autour de 70% de réussite. La variabilité augmente entre le niveau CP et le niveau CE1.

Groupe	% moyen total	Ecart-type moyen
6-7 ans (CP)	72%	6,67
7-8 ans (CE1)	70%	12,31
8-9 ans (CE2)	71%	11,9

Tableau 7. Pourcentages moyens de réussite et écarts-types moyens à l’épreuve de Comparaison Relative de deux quantités en fonction du groupe.

En observant la Figure 34 qui indique le pourcentage moyen de réussite de tous les participants à la tâche, on remarque qu’il y a des variations selon la taille de l’écart considérée. A première vue, cela correspond à ce qu’on observe typiquement dans la littérature - l’effet de distance - c’est-à-dire que plus deux quantités sont proches plus elles sont difficiles à distinguer.

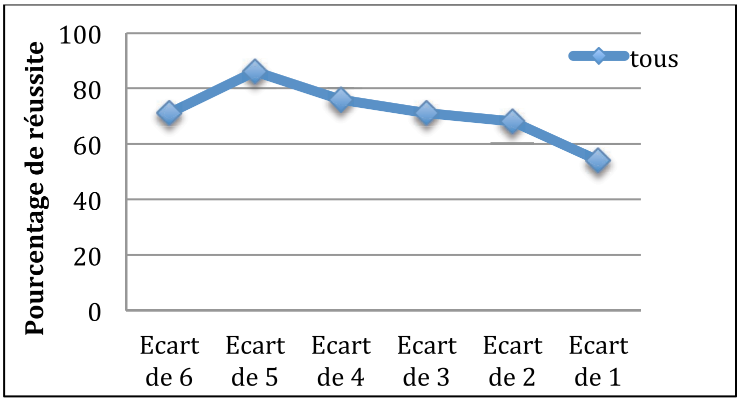


Figure 34. Pourcentage moyen de réussite (tous groupes) à l’épreuve de Comparaison Relative de deux quantités en fonction de la taille de la différence entre les deux collections.

Lorsqu’on s’intéresse au pourcentage de réussite selon la taille de l’écart dans chaque groupe (Tableau 8), on peut supposer qu’il existe un effet de distance pour les trois groupes d’âge, avec une différence au niveau des performances pour un écart de 2 et de 1.

	Ecart de 6	Ecart de 5	Ecart de 4	Ecart de 3	Ecart de 2	Ecart de 1
6-7 ans	75% (10,96)	89% (11,86)	78% (16,39)	76% (15,08)	71% (16,6)	44% (14,5)
7-8 ans	66 % (10,68)	82% (19,5)	78% (18,5)	64% (18,29)	71% (20,7)	61,5% (16,5)
8-9 ans	71% (11,49)	86% (16,15)	78% (17,1)	70% (17,4)	70% (18,4)	52% (17,7)

Tableau 8. Taux moyen de réponses correctes (et écart-type moyen) à l'épreuve de Comparaison Relative de quantités selon la taille de l'écart et le groupe.

5.1.2. Analyse statistique

Nous avons analysé les résultats à l'aide d'une ANOVA 3 (Groupe d'âge : 6-7 ans, 7-8 ans et 8-9 ans) x 6 (Taille de l'écart : écart de 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 entre les deux quantités présentées) à plan mixte. Lorsque le test de Mauchly indiquait que le critère de sphéricité n'était pas rencontré, nous avons utilisé les degrés de liberté corrigés à l'aide de l'estimation de Greenhouse-Geisser.

Les résultats indiquent qu'il n'y a pas d'effet principal de la variable Groupe d'âge sur le pourcentage moyen de réussite ($F(2, 38)=0{,}157$; $p=.85$). En revanche, on trouve un effet significatif de la variable Taille de l'écart sur le pourcentage moyen de réussite ($F(5, 34)=22{,}305$, $\varepsilon=0{,}763$, $p<.001$). Enfin, on ne trouve pas d'effet d'interaction entre ces deux variables ($F(10, 70)=1{,}557$, $p=.132$).

Ces résultats indiquent que les performances de comparaison relative de quantités n'évoluent pas avec l'âge et la scolarisation. Elles atteignent un taux de réussite d'environ 70% pour les quantités de 10 à 22 dont la différence varie de 1 à 6. Toutefois, selon la taille de l'écart entre les deux quantités présentées, le taux de réussite varie et ce de la même manière quel que soit l'âge des participants.

Une analyse complémentaire réalisée avec un *test t de Student* à mesure répétées nous permet de préciser pour quel écart il y a une différence. Nous trouvons une différence significative entre un écart de 1 et 2 ($t(40)=-3{,}478$, $p<.001$), entre un écart de 4 et 5 ($t(40)=-3{,}620$, $p<.001$) et entre un écart de 5 et 6 ($t(40)=6{,}253$, $p<.001$). En revanche, il n'y a pas de différence significative entre un écart de 4 et 6 ($t(40)=1{,}687$, $p=.09$).

Ces résultats sont en accord avec l'existence d'un effet de distance lors de la comparaison de deux quantités chez les enfants de 6 à 9 ans. Cet effet se manifeste par une meilleure efficience pour comparer deux quantités éloignées et une efficience plus réduire pour comparer deux quantités proches.

En résumé, les performances à la tâche de Comparaison Relative de deux quantités nous indiquent qu'il n'y a pas d'évolution dans l'efficience du système analogique chez les enfants de 6 à 9 ans. De ce fait, l'efficience globale de la représentation analogique n'évolue pas avec l'âge et avec l'acquisition des différents codes symbolique. Un effet de distance existe pour les trois groupes d'âges. Il se manifeste de manière similaire de 6 à 9 ans, avec une différence d'efficience selon la taille de l'écart.

5.2. Performances à l'épreuve de comparaison de deux nombres symboliques

5.2.1. Pourcentages moyens de réponses correctes

La Figure 35 montre qu'il n'y a pas de différence notable selon l'âge dans le pourcentage total de réponses correctes à l'épreuve de comparaison de deux nombres symboliques quelle que soit la modalité. Les capacités de comparaison de deux nombres à l'écrit semblent supérieures à celles de l'oral.

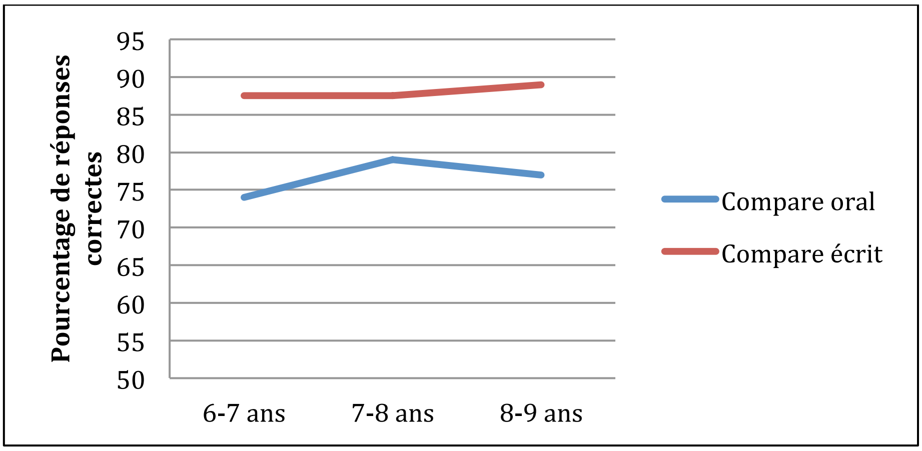


Figure 35. Pourcentages moyens de réponses correctes aux épreuves de comparaison de deux nombres à l'oral et à l'écrit selon le groupe d'âge.

Le Tableau 9 indique le pourcentage de réussite selon la modalité et la taille du ratio. On peut observer d'une manière générale que ce pourcentage est plus élevé dans la modalité orale.

	Modalité écrite	Modalité orale
Ratio faible	82%	74,5%
Ratio moyen	90%	81%
Ratio élevé	90%	74%

Tableau 9. Pourcentages de réussite à l'épreuve de Comparaison de deux nombres symboliques selon la modalité et la taille du ratio.

L'analyse statistique nous indique qu'il n'y a pas d'effet principal du Groupe d'âge sur le pourcentage moyen total de réponses correctes, que ce soit dans la modalité écrite ($F(2, 38)=0,486$, $p=.619$) ou dans la modalité orale ($F(2, 38)=0,069$, $p=.93$). Ainsi, les résultats indiquent que le pourcentage moyen de réponses correctes n'évolue pas avec l'âge.

Nous avons ensuite réalisé une ANOVA 3 (Groupe d'âge) x 2 (modalité : orale ou écrite) x 3 (taille du ratio : faible, moyen, élevé). Il n'y a pas d'effet de la variable Groupe d'âge. En revanche, on trouve un effet principal de la modalité sur le pourcentage de réponses correctes ($F(1, 37)=20,031$, $p<.001$) ainsi qu'un effet principal de la variable Taille du ratio ($F(2, 36)=3,225$, $p=.05$). L'efficience à ce type de tâche est globalement meilleur à l'écrit qu'à l'oral comme l'attestent les pourcentages moyens de réussite.

Une analyse à l'aide d'un *test t de Student* nous révèle qu'il existe une différence significative sur les pourcentages de réponses exactes entre la modalité orale et écrite lorsque le ratio est moyen ($t(39)=2,751$, $p<.001$) et élevé ($t(39)=4,93$, $p<.001$).

Il existe également une différence significative dans les pourcentages de réponses exactes entre le ratio faible et moyen dans la modalité écrite ($t(40)=-2,156$, $p=.037$), et entre le ratio moyen et élevé dans la modalité orale ($t(39)=1,967$, $p=.05$).

Les capacités de comparaison de deux nombres symboliques ne sont pas les mêmes selon la modalité concernée. En effet, les enfants de tous âges sont plus performants dans la modalité écrite qu'orale. On observe également un effet de ratio typique de la littérature à tous les âges dans la modalité écrite. En effet, il existe une différence significative entre un ratio faible et moyen, indiquant des capacités de comparaison plus difficiles lorsque le ratio est faible que lorsqu'il est moyen ou élevé. Toutefois, dans la modalité orale, on constate une différence seulement entre le ratio moyen et élevé à cause d'une diminution du pourcentage de réussite quand le ratio est élevé à l'oral. Ces résultats ne nous permettent donc pas de retrouver un effet de ratio à l'orale. Cela est peut-être lié au fait que la longueur phonologique des mots-nombres est plus importante et que la demande en mémoire de travail s'en trouve alors plus élevée.

5.2.2. Analyse des temps de réaction

L'analyse a porté dans un second temps sur les temps de réponses. Cette tâche a été programmée de manière à ce que la mesure du temps de réaction démarre dès le début de la prononciation du mot-nombre ou dès l'apparition des nombres arabes écrits. Ainsi, le temps de réaction est nécessairement supérieur dans la modalité orale, puisque selon les cas, l'élève devra attendre que les deux nombres aient été prononcés pour répondre. Nous avons alors choisi d'analyser séparément les résultats à l'oral et à l'écrit car nous considérons qu'il n'est pas possible de comparer directement les temps de réaction à l'oral et l'écrit. De manière générale, les temps de réaction moyens semblent répondre à un effet de ratio dans la modalité orale mais non dans la modalité écrite (Tableau 10). De plus, le temps de réaction est globalement inférieur dans la modalité orale.

	Modalité écrite	**Modalité orale**
Ratio faible	2518ms	2809ms
Ratio moyen	2171ms	3931ms
Ratio élevé	2020ms	3406ms

Tableau 10. Temps de réaction moyens à l'épreuve de Comparaison de deux nombres symboliques selon la modalité et la taille du ratio

Nous avons réalisé une ANOVA 3 (Groupe d'âge) x 3 (Taille du ratio) sur les temps de réponses dans la modalité écrite. On ne trouve pas d'effet principal du Groupe d'âge mais un effet principal de la Taille du ratio ($F(2, 37)=15{,}563$, $p<.001$). A l'aide d'un *test t de Student*, nous trouvons une différence significative entre un ratio faible et moyen à l'écrit ($t(40)=3{,}782$, $p<.001$).

Nous avons ensuite réalisé une ANOVA 3x2 sur les temps de réponses dans la modalité orale. On ne trouve pas d'effet principal du Groupe d'âge mais un effet de la Taille du ratio ($F(2,37)=54{,}4$, $p<.001$). L'analyse complémentaire menée avec un *test t de Student* indique une différence significative entre le ratio faible et moyen ($t(40)=-9{,}692$, $p<.001$) et entre le ratio moyen et élevé ($t(40)=5{,}460$, $p<.001$). Toutefois, quand on observe les temps de réaction moyen selon le ratio (Tableau 10), on observe un effet de ratio inverse, c'est-à-dire une augmentation du temps de réponse avec l'augmentation du ratio. Une fois de plus, cela est lié à la tâche utilisée, puisqu'un ratio plus élevé signifie un temps de prononciation plus long et donc un temps de réponse supérieur.

5.3. Performances aux épreuves de lecture et de dictée

Le Tableau 11 indique les pourcentages moyens de réussite pour chaque groupe d'âge aux épreuves de lecture et de dictée de nombres. Nous constatons qu'il y a une augmentation constante de ces scores avec l'âge dans les deux épreuves. Même si les capacités de lecture de nombres sont légèrement supérieures à 6-7 ans et 7-8 ans, il n'y a, a priori, plus de différence à 8-9 ans.

	6-7 ans	**7-8 ans**	**8-9 ans**
Lecture	55,14%	84,92%	90,86%
Dictée	50,57%	80,92%	90,00%

Tableau 11. Pourcentages moyens de réussite aux épreuves de lecture et dictée de nombres selon le groupe d'âge.

La Figure 36 représente l'évolution du pourcentage de réussite à l'épreuve de lecture de nombres. On constate un effet de taille du nombre à tous les âges mais surtout à l'âge de 6-7 ans. Entre 6 et 9 ans, les nombres à trois et quatre chiffres sont lus avec plus d'erreurs.

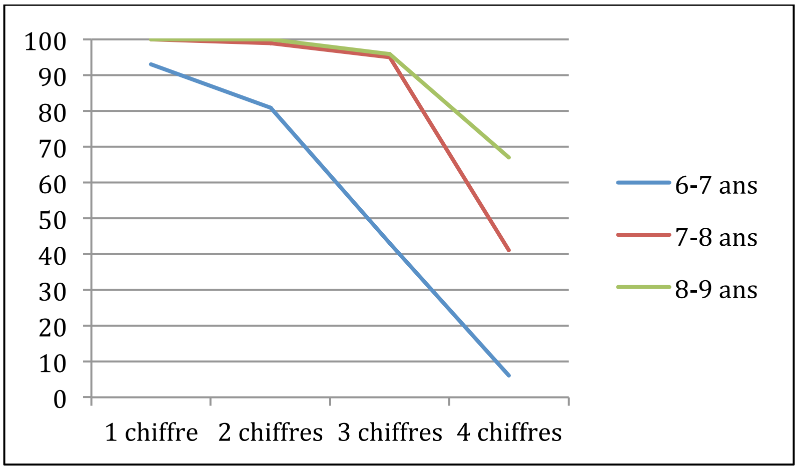


Figure 36. Evolution du pourcentage de réussite à l'épreuve de lecture de nombres selon la taille du nombre et le groupe d'âge.

La Figure 37 montre également l'évolution du pourcentage pour l'épreuve de dictée de nombres. On observe que l'épreuve de lecture de nombres est globalement moins bien réussie que l'épreuve de dictée. Il existe un pattern similaire entre la lecture et la dictée, c'est-à-dire un effet de la taille du nombre.

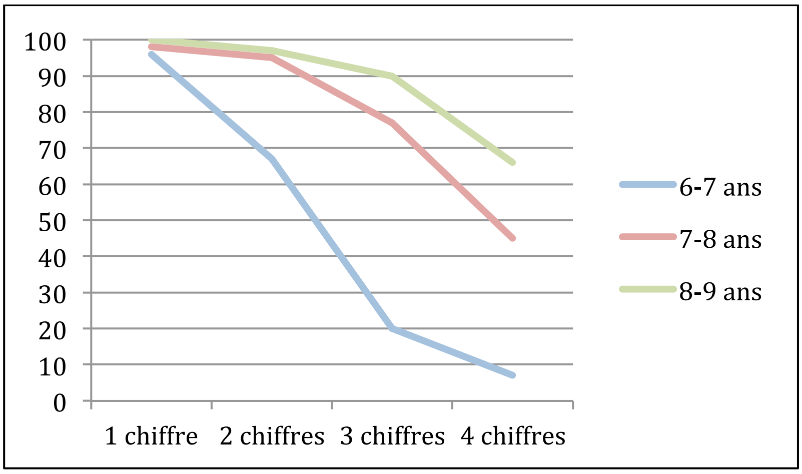


Figure 37. Evolution du pourcentage de réussite à l'épreuve de dictée de nombres selon la taille et le groupe d'âge.

Nous avons réalisé une ANOVA 3 (Groupe d'âge : 6-7 ans, 7-8 ans et 8-9 ans) x 2 (Direction de transcodage : lecture et dictée) X 4 (taille du nombre : nombre à un chiffre, deux, trois ou quatre chiffres). La correction de Greenhouse-Geisser a été utilisée lorsque le résultat du test de Mauchly n'était pas satisfaisant.

On trouve un effet principal du Groupe d'âge ($F(2, 38)=38,9$, $p<.001$), un effet principal du Direction de transcodage ($F(1, 38)=13,039$, $\varepsilon=1$, $p<.001$) ainsi qu'un effet principal de la Taille du nombre ($F(3, 36)=86,065$, $\varepsilon=0,676$, $p<.001$).

Nous avons ensuite réalisé un *test t de Student* afin de mieux cerner l'effet principal de l'âge. On trouve une différence significative entre le groupe 6-7 ans et 7-8 ans pour la lecture ($t(25)=-5,519$, $p<.001$) et la dictée de nombres ($t(25)=-5,269$, $p<.001$). Une différence significative existe également entre le groupe 6-7 ans et 8-9 ans pour la lecture ($t(26)=-7,034$, $p<.001$) et la dictée de nombres ($t(26)=-7,746$, $p<.001$).

On trouve également un effet d'interaction entre les variables Groupe d'âge et Taille du nombre ($F(6, 74)=9,066$, $p<.001$) ainsi qu'un effet d'interaction entre la Direction de transcodage et la Taille du nombre ($F(3, 36)= 7,782$, $\varepsilon=0,675$, $p<.001$). Il n'y a pas d'autre effet d'interaction.

Le pourcentage moyen de réussite en lecture et en dictée de nombre évolue avec l'âge et principalement entre 6 et 8 ans. La réussite est différente selon la direction du traitement symbolique quel que soit le groupe d'âge, en faveur de la lecture de nombres. Enfin, le pourcentage de réussite est différent selon la taille du nombre et selon la direction du transcodage et ce de manière différenciée selon l'âge des enfants.

Une seconde partie de l'analyse a porté sur une comparaison entre les groupes d'âge selon la direction du traitement et la taille du nombre. Un *test t de Student* nous indique qu'il existe une différence significative entre le groupe 6-7 ans et 7-8 ans pour la tâche de lecture lorsque le nombre comporte deux chiffres (t(25)=-4,559, p<.001), trois chiffres (t(25)=-5,3, p<.001) et quatre chiffres (t(25)=-3,046, p<.001). En dictée de nombres entre le groupe 6-7 et 7-8 ans, on trouve une différence pour les nombres à deux chiffres (t(25)=-5,261, p<.001), trois chiffres (t(25)=-5,299, p<.001) et quatre chiffres (t(25)=-3,005, p<.001). Quand on compare le groupe 6-7 ans et 8-9 ans, l'analyse révèle une différence significative en lecture pour les nombres à deux chiffres (t(26)=-5,140, p<.001), trois chiffres (t(26)=-5,573, p<.001) et quatre chiffres (t(26)=-5,744, p<.001). On trouve une différence significative pour la tâche de dictée entre 6-7 et 8-9 ans lorsque le nombre comporte deux chiffres (t(26)=-6,411, p<.001), trois chiffres (t(26)=-7,752, p<.001) et quatre chiffres (t(26)=-5,185, p<.001). On ne trouve aucune différence significative quand on compare le groupe 7-8 ans et le groupe 8-9 ans.

Ainsi, entre 6 et 8 ans, les enfants améliorent significativement leurs compétences pour lire et écrire les nombres de deux à quatre chiffres.

Une troisième partie de l'analyse a visé à comparer par paires les pourcentages de réussite entre la lecture la dictée de selon la taille du nombre. Un *test t de Student* à mesures appariées indique une différence quand le nombre comporte deux chiffres (t(40)=4,128, p<.001) et trois chiffres (t(40)=3,718, p<.001). Cela nous permet d'émettre l'hypothèse de la mise en place d'un traitement plus précoce dans la direction écrit vers oral quand les nombres comporte deux et trois chiffres entre 6 et 9 ans.

5.4. Performances aux épreuves "Estimateur" et "Estimateur" Inverse

Pour l'"Estimateur" et l'"Estimateur" Inverse, nous disposons de trois types d'indices à analyser dans chaque modalité : le pourcentage moyen de réponses exactes, le pourcentage moyen de réponses approximatives et l'écart moyen.

Les pourcentages moyens de réponses exactes et approximatives à l'épreuve "Estimateur" et "Estimateur" Inverse selon la modalité symbolique sont spécifiés dans les Tableaux 12 et 13.

Pour le *mapping* d'une grandeur à un nombre symbolique ainsi que pour le mapping inverse, on observe que les pourcentages de réponses exactes et approximatives augmentent avec l'âge dans les deux modalités.

	% de réponses approx. à l'oral	% de réponses approx. à l'écrit	% de réponses exactes à l'oral	% de réponses exactes à l'écrit
6-7 ans	32,8 % (14,5)	30,36 % (12,8)	2 % (3,14)	2,86 % (3,3)
7-8 ans	43,23 % (17,9)	40,77 % (19,9)	6,53 % (7,2)	8,15 % (7,3)
8-9 ans	41,36 % (19,9)	44,3 % (17,1)	4,85 % (5,2)	5,2 % (4,4)

Tableau 12. Pourcentages moyens de réponses approximatives et exactes (ainsi que les écarts-types) à l'épreuve "Estimateur" (*mapping* symbolique vers analogique) en modalité orale et écrite en fonction du groupe d'âge

	% de réponses approx. à l'oral	% de réponses approx. à l'écrit	% de réponses exactes à l'oral	% de réponses exactes à l'écrit
6-7 ans	28,6 % (21,07)	28,6 % (23,16)	6,07 % (6,84)	2,86 % (4,69)
7-8 ans	36,9 % (17,02)	43,85 % (15,6)	7,70 % (7,25)	8,46 % (6,89)
8-9 ans	44,5 % (24,6)	41,43 % (23,8)	7,86 % (8,01)	9,29 % (12,06)

Tableau 13. Pourcentages moyens de réponses approximatives et exactes (ainsi que les écarts-types) à l'épreuve "Estimateur" Inverse (*mapping* analogique vers symbolique) en modalité orale et écrite en fonction du groupe d'âge

En ce qui concerne l'écart-moyen, la Figure 38 nous montre qu'il n'y a, a priori, pas de différence entre l'oral et l'écrit lorsqu'on confond les groupes d'âges et ce pour le *mapping* analogique vers symbolique ainsi que pour le *mapping* inverse.

On observe que le groupe 6-7 ans a un écart-moyen supérieur aux deux autres groupes d'âge quel que soit le *mapping* et la modalité concernée, il semble donc que l'écart moyen dans la mise en correspondance entre une grandeur et un nombre symbolique (et inversement) diminue avec l'âge notamment entre 6 et 8 ans.

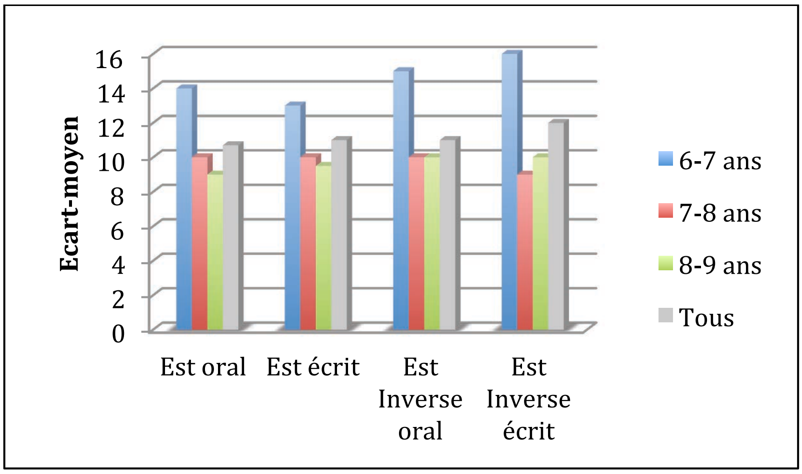


Figure 38. Ecart-moyen aux quatre épreuves "Estimateur" selon le groupe d'âge

Nous avons choisi d'analyser les résultats à l'aide d'une ANOVA 3 (Groupe d'âge : 6-7 ans, 7-8 ans et 8-9 ans) x 2 (Direction du transcodage : de l'analogique vers le symbolique et du symbolique vers l'analogique) x 2 (modalité : orale ou écrite) pour chaque indice. Nous disposons d'un indice relatif au pourcentage de réponses exactes et nous avons calculé également le pourcentage de réponses approximatives pour chaque élève en considérant les réponses qui se situent à 10% de la réponse cible. Enfin, nous avons calculé l'écart moyen entre la réponse donnée et la cible pour chaque participant.

5.4.1. Pourcentage de réponses exactes

Dans un premier temps, nous avons réalisé l'ANOVA 3x2x2 sur le pourcentage de réponses exactes. L'analyse indique un effet de la variable Groupe d'âge sur ce pourcentage (*F*(2,38)=5,008, p=.012). On trouve également un effet de la direction du transcodage (*F*(1,38)=3,7, p=.05).

Une analyse avec un *t de Student* révèle une différence significative dans les pourcentages de réponses exactes entre le groupe 6-7 ans et 7-8 ans à l'épreuve “Estimateur” en modalité orale (t(25)=-2,150, p=.04), à l'épreuve “Estimateur” en modalité écrite (t(25)=-2,463, p=.02) ainsi qu'à l'épreuve “Estimateur” inverse à l'écrit (t(25)=-2,488, p=.02).

Ainsi, le pourcentage de réponses exactes évolue de 6 à 8 ans pour un *mapping* entre un nombre oral ou un mot-nombre avec une grandeur ainsi que pour un *mapping* entre une grandeur et un nombre écrit. Il semble également que les pourcentages de réponses exactes lors d'un *mapping* symbolique vers analogique en modalité orale (*M*=7,2%) et en modalité écrite (*M*=6,8%) soient supérieurs à ceux du *mapping* analogique vers symbolique que ce soit à l'oral (*M*=4,4%) ou à l'écrit (*M*=5,3%).

5.4.2. Pourcentage de réponses approximatives

Dans un second temps, nous avons réalisé une ANOVA 3x2x2 sur le pourcentage de réponses approximatives. L'analyse indique un effet principal du Groupe d'âge sur cet indice (*F*(2, 38)=3,4, p=.04).

Une analyse plus poussée à l'aide d'un *t de Student* nous permet de dire qu'il existe une différence significative entre les pourcentages de réponses approximatives du groupe 6-7 et 7-8 ans pour l'épreuve “Estimateur” inverse à l'écrit (t(25)=-1,995, p=.005) ainsi qu'une différence significative entre le groupe 6-7 ans et 8-9 ans pour l'épreuve “Estimateur” à l'écrit (t(26)=-2,443, p=.02).

Au final, le pourcentage de réponses approximatives évolue entre 6 et 8 ans pour un *mapping* analogique vers symbolique à l'écrit. Il évolue de 6 à 9 ans pour un *mapping* symbolique vers analogique à l'écrit.

5.4.3. Ecart-moyen

En troisième lieu, nous avons réalisé l'ANOVA 3x2x2 sur l'écart moyen. L'analyse révèle un effet principal du Groupe d'âge sur l'indice écart-moyen ($F(2, 38)=5{,}098$, $p=.011$).

L'analyse à l'aide d'un *t de Student* révèle une différence significative dans l'écart moyen entre le groupe 6-7 et 7-8 ans lors de l'épreuve “Estimateur” en modalité orale (t(25)=2,202, p=.037), en modalité écrite (t(25)=2,08, p=.048) ainsi que pour l'épreuve “Estimateur” inverse en modalité écrite (t(25)=2,127, p=.043). Une différence significative existe entre 6-7 et 8-9 ans à l'épreuve “Estimateur” à l'oral (t(26)=3, 087, p<.05) et à l'écrit (t(26)=2,467, p=.021).

5.4.4. Résumé sur les résultats à l'épreuve “Estimateur” et “Estimateur” inverse

Le pourcentage de réponses exactes augmente de 6 à 9 ans quel que soit la direction de la mise en correspondance (analogique vers symbolique ou inversement) et quelle que soit la modalité symbolique. Il y a plus de réponses exactes dans le *mapping* symbolique vers analogique quelle que soit la modalité.

Le pourcentage de réponses approximatives augmente avec l'âge mais seulement à l'écrit. De plus, il semblerait que les capacités d'approximations dans le *mapping* symbolique vers analogique (en modalité écrite) se développent plus rapidement et plus précocement que dans le *mapping* inverse.

Enfin, l'écart moyen diminue avec l'âge. Il diminue d'abord de 6 à 7 ans lorsqu'il s'agit de mettre en correspondance un nombre arabe écrit et une grandeur. En revanche, la correspondance d'une grandeur à un nombre symbolique augmente progressivement de 6 à 9 ans dans les deux modalités.

5.5. Analyse développementale des représentations numériques, des mises en correspondances et de leurs relations

5.5.1. Relations entre les trois types de représentations numériques

Nous nous intéressons maintenant aux capacités spécifiques à chacune des représentations. Nous avons réalisé une ANOVA 3 (Groupe d'âge) x 3 (modalité : orale, écrite ou analogique). Cette analyse ne révèle pas d'effet principal du Groupe d'âge mais un effet principal significatif de la Modalité ($F(2, 37)=34{,}025$, $p<.0001$). L'analyse à l'aide du *test t de Student* montre une différence significative entre les pourcentages de réussite à l'épreuve de Comparaison de quantités et de nombres arabes ($t(40)=-8{,}066$, $p<.001$), à l'épreuve de Comparaison de quantités et de mots-nombres ($t(40)=2$, $p=.005$) et entre l'épreuve de Comparaison de mots-nombres et de nombres arabes ($t(40)=4{,}828$, $p<.001$). La représentation des nombres à l'écrit est globalement plus efficiente (M=88%) que la représentation des mots-nombres (M=76%) que la représentation des grandeurs (M=71%) de 6 à 9 ans.

5.5.2. Analyse développementale du **mapping** *entre un nombre écrit et un mot-nombre*

Pour réaliser l'analyse développementale du *mapping* entre deux nombres symboliques différents, nous avons d'abord réalisé une analyse des corrélations entre les deux performances. Cette analyse révèle une corrélation globale ($R=0{,}698$, $p=.008$), ainsi qu'à chaque niveau d'âge : 6-7 ans ($R=0{,}746$, $p=.002$), 7-8 ans ($R=0{,}698$, $p=.008$) et 8-9 ans ($R=0{,}768$, $p=.001$). Les performances en lecture et dictée de nombres évoluent donc dans le même sens entre 6 et 9 ans.

Nous avons ensuite considéré la comparaison des performances dans les tâches de lecture et dictée de nombres. On constate qu'il y a bien une différence entre les performances en lecture (M=77%) et en dictée de nombres (M=73,6%), en faveur de la lecture ($t(40)=2{,}071$, $p=.045$). De plus, comme nous l'avons analysé ci-dessus, les performances augmentent avec l'âge, notamment entre 6 et 8 ans pour les deux types d'activité. Ainsi, les capacités de transcodage entre deux nombres symboliques évoluent conjointement mais sont plus efficientes dans la direction écrit ➔ oral. Elles se développement principalement entre l'âge de 6 et 8 ans.

5.5.3. Analyse développementale du **mapping** *grandeur/nombre arabe*

Nous avons ensuite analysé le développement des capacités de *mapping* grandeur/nombre arabe en fonction de l'âge. L'analyse avec le *test t de Student* ne révèle aucune différence significative dans la direction du traitement (analogique ➔ écrit ou écrit ➔ analogique) pour les trois indices calculés (pourcentage de réponses exactes, pourcentage de réponses approximatives et écarts moyens). Ainsi, quel que soit l'âge, l'efficience du *mapping* grandeur/nombre arabe est similaire, et ce peu importe la direction du transcodage.

5.5.4. Analyse développementale du **mapping** *grandeur/mot nombre*

L'analyse a ensuite porté sur le développement des capacités de *mapping* grandeur/mot-nombre en fonction de l'âge. Pour cela, nous avons réalisé une ANOVA 3 (Groupe d'âge) x 2 (Direction de traitement : analogique → oral ou oral → analogique) x 3 (indice : pourcentage de réponses exactes, pourcentage de réponses approximatives et écart-moyen). L'analyse indique un effet principal de la variable indice ($F(2, 37)= 108692$, $\varepsilon=0,555$, $p<.001$). Une analyse complémentaire permet de préciser qu'il existe une différence significative dans la direction du traitement pour le pourcentage de réponses exactes ($t(40)=2,011$, $p=.05$). En effet, le pourcentage de réponses exactes est inférieur quand on passe de l'analogique vers le mot-nombre (M=4,4) par rapport au passage du mot-nombre à l'analogique (M=7,2). Finalement, entre 6 et 9 ans les enfants sont plus efficients pour mettre précisément en correspondance un mot-nombre avec sa grandeur.

6. Discussion

L'objectif de cette étude était de mieux saisir l'évolution des représentations et des traitements numériques au cours des apprentissages symboliques scolaires entre 6 et 9 ans. Pour cela, nous avons réalisé une étude transversale auprès d'enfants typiques de trois niveaux scolaires correspondant à trois classes d'âge : 6-7 ans, 7-8 ans et 8-9 ans. Nous allons maintenant reprendre les quatre points visés par ce travail afin de discuter des résultats obtenus.

6.1. Evolution des représentations numériques de 6 à 9 ans

Le premier point concerne l'évolution des différentes représentations de 6 à 9 ans, période où se déroule l'enseignement des codes symboliques.

La tâche de comparaison de deux quantités est une tâche reconnue comme mesurant l'acuité du « sens du nombre » (Dehaene, 2001 ; Halberda et Feigenson, 2008 ; Piazza et al., 2010) puisqu'elle mobilise essentiellement la connaissance de la représentation analogique. Pour comparer deux ensembles discrets, il suffit en effet d'avoir une représentation de leur grandeur relative. Les résultats indiquent qu'il n'y a pas de différence dans l'acuité du sens des nombres compris entre 10 à 21 de 6 à 9 ans. Contrairement à ce qui était attendu, l'efficience du traitement analogique n'évolue pas. Ce résultat est en accord avec les résultats observés par Kolkman, Kroesbergen et Leseman (2013) qui montrent que les performances des enfants à ce type de tâche sont stables de 5 à 6 ans. Nous pouvons émettre l'hypothèse que l'acuité du « sens du nombre » évolue jusqu'à environ 5 ans avec les premiers apprentissages, puis qu'elle se stabilise jusqu'à l'intégration plus tardive des représentations symboliques qui viennent encore optimiser son acuité. Néanmoins, nous utilisons dans notre tâche des quantités inférieures ou égales à 21. Il est probable que de 6 à 9 ans, les enfants aient déjà atteints la compétence « adulte » sur ces grandeurs. Il serait pertinent d'utiliser une tâche d'acuité non symbolique sur des grandeurs supérieures. Toutefois, on peut aussi se demander si l'acuité numérique non-symbolique n'évolue pas faute de sollicitations dans l'enseignement du primaire ?

On trouve néanmoins un effet de distance, c'est-à-dire, une meilleure efficience à la tâche lorsqu'il s'agit de comparer deux quantités éloignées, et ce quel que soit l'âge des participants. C'est notamment avec un écart de 1 et 2 que les pourcentages de réussite sont les plus différents. Ces résultats correspondent à ce qu'on retrouve dans la littérature (Halberda et Feigenson, 2008 ; Hyde, Khanum et Spelke, 2014 ; Moyer et Landauer, 1967 ; Mundy et Gilmore, 2009).

Nous avons utilisé une épreuve d'acuité numérique similaire pour les mots-nombres et les nombres arabes. Nos résultats montrent qu'il n'y a pas d'évolution liée à l'âge ou à la scolarisation dans l'efficience et la vitesse de réponse à ce type de tâche, que ce soit dans la modalité orale ou écrite. D'une manière générale, les performances entre 6 et 9 ans sont meilleures et plus rapides dans la comparaison de deux nombres arabes relativement à la comparaison de deux mots-nombres. A notre connaissance, aucune étude jusqu'alors n'avait distingué l'acuité numérique orale et écrite. Nous considérons ce résultat comme un argument en faveur d'une différence de traitement selon la modalité symbolique mobilisée dans une tâche d'acuité numérique. Les difficultés liées au système langagier français en mathématiques se répercutent sur ce type de tâche, induisant notamment une surcharge en mémoire de travail et un temps de réponse supérieur. Nous considérons qu'à l'âge de nos plus jeunes participants, ils sont déjà tous en mesure de comparer correctement deux nombres symboliques. Cela signifie alors qu'ils connaissent et utilisent des stratégies efficaces de comparaison très précocement, alors même que certains nombres n'avaient pas encore été enseignés. Nous pensons également que 1) les enfants ne passent pas par un recodage sémantique lorsqu'ils comparent deux nombres symboliques, sinon les performances seraient similaires ; et que 2) le traitement du nombre arabe écrit est certainement un traitement purement morphologique dès 6 ans étant donné les temps de réponses inférieurs que nous avons mesuré. La question d'un recodage écrit face à deux mots-nombres reste néanmoins en suspens, notamment quand on met en lien les performances des enfants à la tâche de dictée de nombres.

On observe, tout comme pour la comparaison de grandeurs, un effet de distance à travers les performances et la vitesse de réaction pour la comparaison de deux nombres arabes. Ce résultat est en accord avec ceux observés par Mundy et Gilmore (2009), à savoir un effet de distance dans une tâche de comparaison de deux nombres arabes écrits chez les enfants de 7 ans en moyenne. Notre étude permet d'avancer que l'effet de distance face à deux nombres arabes écrits persiste sans évoluer de manière significative, au moins jusqu'à 9 ans. Toutefois, nos résultats ne nous permettent pas d'observer un effet de distance dans la modalité orale, vraisemblablement à cause des biais liés à la tâche utilisée (temps de prononciation des mots-nombres).

6.2. Evolution des capacités de transcodage de 6 à 9 ans

Le second point de nos questionnements concerne l'évolution des capacités de transcodages numériques symboliques de 6 à 9 ans. Nous émettions l'hypothèse d'une différence de performances selon la direction de la transcription et selon la taille des nombres.

Comme attendu, les performances en lecture et dictée de nombres évoluent de 6 à 9 ans, et tout particulièrement entre 6 et 8 ans, ce qui correspond à une période d'apprentissage cruciale. L'étude de Kolkman et ses collaborateurs (2013) montrait également une augmentation des capacités de lecture de nombres chez les enfants de 4 à 6 ans. Les capacités de lecture de nombres sont globalement supérieures aux compétences de dictée. Nous pensons que ce résultat est lié à l'importance donnée à cette direction de transcription dans les premières années de scolarisation du primaire.

On observe également un effet de la taille des nombres dans les deux tâches, c'est-à-dire des performances supérieures quand les nombres sont petits et des performances nettement inférieures pour les nombres à quatre chiffres. Cet effet est observé de 6 à 9 ans mais principalement entre 6 et 8 ans. On constate un décalage développemental dans l'acquisition des capacités de transcodage selon la taille du nombre. Cela est cohérent avec l'évolution du programme mathématique du CP au CE2 et les résultats obtenus par Noël et Turconi (1999).

Il existe une différence, quand les nombres comportent deux et trois chiffres, entre les capacités de lecture et dictée en faveur de la lecture. Nous validons ainsi notre hypothèse concernant une acquisition plus précoce du transcodage des nombres de l'écrit vers l'oral de 6 à 9 ans. Ce décalage dans l'acquisition de la transcription pourrait être lié à une capacité limitée de la mémoire de travail avant 9 ans.

6.3. Evolution des capacités de *mapping* analogique/symbolique de 6 à 9 ans

Le troisième niveau de notre questionnement concerne le développement des capacités de *mapping* entre une grandeur et un nombre symbolique, et inversement. Pour cela, nous avons eu recours à deux tâches d'estimation numérique de type « number-to-position » et « position-to-number ». Ces deux tâches nous permettent d'évaluer la mise en correspondance entre un nombre et une grandeur ainsi qu'entre une grandeur et un nombre. Nous avons ainsi distingué trois mesures à savoir le pourcentage de réponses exactes, le pourcentage de réponses approximatives et l'écart moyen entre la réponse et la cible. Nous avons émis l'hypothèse que le *mapping* d'un nombre arabe écrit vers une représentation analogique serait acquit avant le *mapping* inverse. Nous nous attendions également à ce que les enfants répondent de plus en plus exactement au cours du développement, et de manière plus en plus précise (diminution de l'écart moyen).

Nos résultats indiquent une augmentation de l'exactitude dans le *mapping* analogique/nombre de 0 à 100 avec l'âge, quelle que soit la modalité et la direction de mise en correspondance. Néanmoins, les compétences sont globalement meilleures dans la direction symbolique ➔ analogique avec une amélioration significative entre 6 et 8 ans pour les deux modalités. Dans la direction analogique ➔ symbolique, les performances augmentent aussi significativement entre 6 et 8 ans mais seulement pour la modalité écrite. Une diminution des erreurs avec l'âge et le niveau scolaire dans une tâche du même type a également été observée par plusieurs auteurs (Ashcraft et Moore, 2012 ; Geary, Hoard, Nugent et Byrd-Craven, 2008 ; Praete et Desoete, 2014 ; Moeller, Pixner, Kaufmann et Nuerk, 2009 ; Muldoon, Towse, Simms et Perra, 2013).

En ce qui concerne les capacités d'estimation, nous avons observé une augmentation du pourcentage de réponses approximatives de 6 à 8 ans dans la mise en correspondance grandeur/nombre arabe écrit, et de 6 à 7 ans pour la mise en correspondance nombre arabe écrit/grandeur. Il semblerait alors que les capacités d'estimation numérique à l'écrit s'améliorent avec l'âge. Les capacités de *mapping* d'une grandeur vers un nombre arabe semblent surtout se développer de 6 à 7 ans tandis que le *mapping* inverse se développe plus progressivement jusqu'à 9 ans.

La précision des estimations (écarts moyens) s'améliore également avec l'âge. Entre 6 et 8 ans, les enfants deviennent de plus en plus précis quand il s'agit de mettre en correspondance un mot nombre ou un nombre arabe avec une grandeur ainsi que pour mettre en lien une grandeur avec un nombre arabe. Le *mapping* dans la direction représentation symbolique ➔ la grandeur continue à se développer jusqu'à 9 ans.

Mundy et Gilmore (2009) ont étudié les capacités de *mapping* de 6 à 8 ans à l'aide d'une tâche de *mapping* à choix. Leurs résultats vont néanmoins dans le même sens que ceux que nous obtenons ici. Les enfants de 6 à 8 ans réussissent à mettre en correspondance une représentation symbolique et une représentation non-symbolique dans les deux directions. De plus, cette capacité se développe avec l'âge, avec une amélioration de la précision des estimations. Les auteurs trouvent de plus un lien entre les compétences non-symboliques et la réussite scolaire. Toutefois, Mundy et Gilmore confondent la représentation arabe et verbale dans leur tâche de *mapping* sans les distinguer. Notre étude apporte un élément de réflexion supplémentaire à savoir que de 6 à 8 ans quel que soit l'indice de mesure utilisé, la mise en correspondance entre une grandeur et un mot-nombre n'évolue pas. Nous pensons que cela est lié soit à une absence de sollicitation de cette mise en correspondance dans les apprentissages, soit à un niveau de performances maximum atteint dans ce type d'activité. Dans le premier cas, si cela est lié aux apprentissages scolaires, nous constatons dans notre étude que le simple fait de solliciter les correspondances entre mot-nombre et grandeur ne suffit pas pour développer la correspondance réciproque, auquel cas les deux performances évolueraient conjointement. Dans le second cas, s'il s'agit d'un plafond de performances dans le *mapping* avec un mot-nombre, cela signifierait que le développement de la représentation verbale orale a lieu avant 6 ans et ne se développe plus ensuite. Il serait nécessaire de mener d'autres études pour vérifier ces hypothèses et déterminer s'il est nécessaire, et pertinent, de solliciter les relations entre les grandeurs et les mots-nombres, au même titre que les relations inverses.

Peu importe la modalité de la tâche d'estimation numérique, nous observons une diminution des erreurs (ou une augmentation des réponses correctes). Ce résultat est en accord avec ceux de

Praete et Desoete (2014) ou Barth, Kanwisher et Spelke (2003). Nous nous positionnons alors selon la théorie d'une indépendance de format dans l'estimation numérique. Toutefois, nos résultats nous permettent de montrer des différences selon la direction de mise en lien dans une tâche d'estimation numérique. Ainsi, les capacités d'approximation semblent dépendantes de la direction de la mise en correspondance notamment entre 6 et 8 ans en faveur de la direction symbolique ➔ analogique. Après 8 ans, les performances sont similaires.

6.4. Développement des représentations et de leurs relations de 6 à 9 ans

Le dernier point de nos interrogations concerne le développement des différentes représentations les unes par rapport aux autres, et leurs interactions au cours des trois premières années de scolarisation primaire. Pour répondre à cette question, nous avons tenté d'évaluer entre 6 et 9 ans les différentes représentations numériques et leurs mises en relation à la lumière du modèle de Dehaene et Cohen (1995). Après avoir analysé les résultats de chaque épreuve, nous avons étudié les relations développementales entre les épreuves afin d'avoir une meilleure représentation des traitements numériques avec l'âge.

Pour savoir si les trois types de représentations se développent de la même manière entre 6 et 9 ans, nous avons réalisé une analyse complémentaire. Il n'y a pas de différence en fonction de l'âge sur l'évolution de ces trois types de représentations. En revanche, il y a une différence dans l'efficience globale de ces trois types de représentation en faveur de la modalité écrite d'abord, puis de la modalité orale et enfin de la modalité analogique. Ainsi, on observe une persistance de la supériorité de la modalité écrite dans les traitements numériques de 6 à 9 ans.

A la question de savoir si les différentes directions de transcodage évoluent dans le même sens de 6 à 9 ans, nous trouvons que toutes ces compétences évoluent en parallèle puisqu'il existe une corrélation entre ces deux mesures. Entre 6 et 8 ans, les capacités de transcodage bidirectionnelles augmentent considérablement. Les enfants sont en mesure de lire et écrire sous dictée des nombres de plus en plus grand avec l'âge. Après 8 ans, les performances n'évoluent pas significativement.

Quel que soit l'âge, il n'y a pas de différence dans l'efficience de la mise en correspondance entre une grandeur et un nombre écrit quel que soit la direction du traitement. Les deux évoluent avec l'âge d'une manière semblable indiquant que d'un point de vue développemental, l'établissement de ces relations est similaire. Quant à l'efficience du *mapping* entre une grandeur et un mot-nombre, on observe une différence selon la direction du traitement. L'exactitude de la mise en correspondance est plus importante lorsqu'il s'agit de mettre en lien le mot-nombre avec sa grandeur plutôt que l'inverse. Ainsi, il semblerait que les correspondances s'établissent d'abord entre le mot-nombre et la grandeur. Etant donné que les premières représentations numériques préverbales sollicitent la grandeur, il semble cohérent que durant les premiers apprentissages symboliques à l'oral, les enfants mettent en correspondance les mots-nombres avec les grandeurs qu'ils maîtrisent déjà. L'établissement de la relation inverse est plus compliquée et nécessite plus de familiarité avec le système symbolique verbal oral.

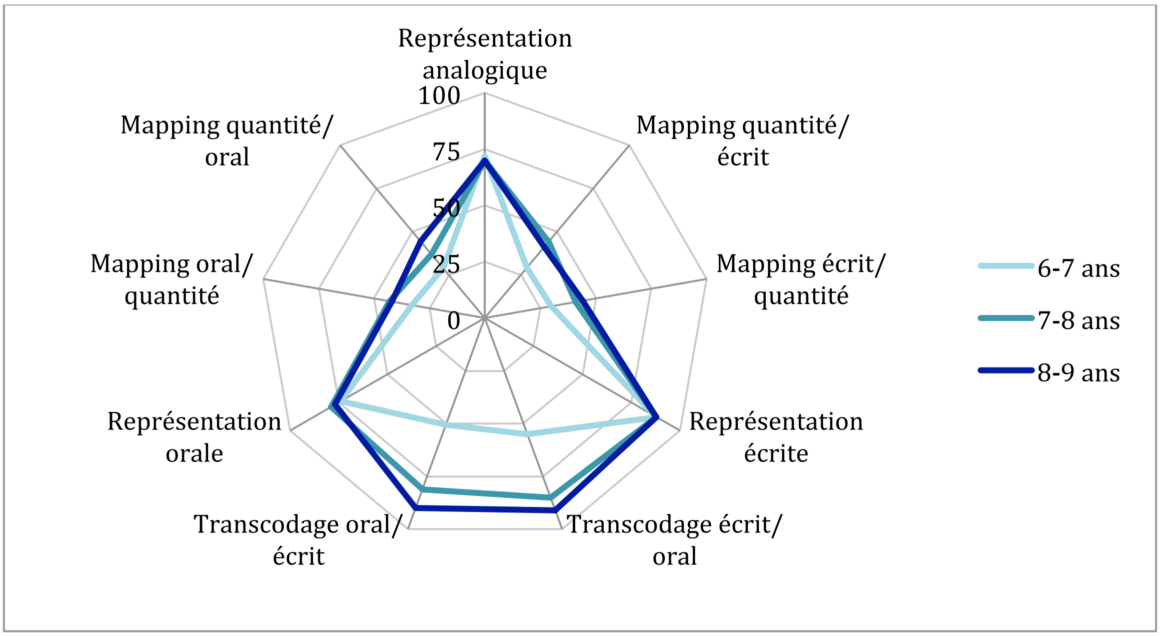


Figure 39. Evolution des pourcentages de réussites à chaque épreuve selon l'âge.

La Figure 39 nous permet de mieux nous représenter l'évolution des performances pour chaque épreuve en fonction de l'âge. Ainsi, la précision de chaque représentation ne semble pas vraiment évoluer avec l'âge ni selon la modalité sollicitée. Au niveau des performances de correspondances en revanche, on constate que les habiletés de transcodage symbolique (pour les nombres jusqu'à 4 chiffres) se développent avant les compétences de *mapping* jusqu'à 100. Il semblerait alors qu'un plus grand temps d'apprentissage soit nécessaire pour que, dans les apprentissages scolaires typiques, les élèves acquièrent une bonne représentation des nombres et de leurs correspondances entre-elles.

Kolkman et ses collaborateurs (2013) observent qu'à 4 et 5 ans, trois systèmes de traitements numériques se développent d'abord séparément, puis s'intègrent ensuite vers 6 ans à travers un système de traitement global.

Avant 6 ans, le système symbolique et non-symbolique réalisent des traitements numériques différents et un troisième système, le système du *mapping* semble également fonctionner de manière distincte aux deux autres. Face à un symbole numérique, l'enfant peut soit le traiter de manière symbolique, soit le mettre en correspondance. En revanche, après 6 ans, les enfants mettraient systématiquement en correspondance les représentations.

Ces résultats se situent dans la lignée des travaux de Dehaene (2001) ou encore de Von Aster et Shalev (2007) qui, à travers leurs modèles, considèrent un développement distinct des capacités symboliques et non-symboliques jusqu'à une intégration progressive chez les adultes.

7. Conclusion

Dans notre étude qui évalue les capacités des systèmes symboliques (écrit et oral) et non-symbolique, ainsi que les capacités de *mapping* ou de transcodage entre les représentations de 6 à 9 ans, nous apportons des éléments de réflexion supplémentaires. L'atout principal de ce travail est que nous évaluons l'ensemble des systèmes de traitements et de leurs relations au moment où les apprentissages symboliques sont les plus prégnants. Comparativement à Kolkman et ses collaborateurs, nous évaluons également des tailles de nombres supérieures à 100, notamment dans les activités de transcodage.

Tout d'abord, nous observons qu'il n'existe pas d'amélioration de l'acuité numérique quel que soit le type de représentation sollicité. Les trois systèmes semblent donc fonctionner de manière semblable entre 6 et 9 ans, tout comme l'indique également l'étude de Kolkman (Ibid). Toutefois, les capacités de *mapping* ne sont pas les mêmes selon la modalité mobilisée et la direction de la mise en correspondance. Ainsi, nous émettons l'hypothèse qu'après 6 ans et suite à l'instruction scolaire des représentations symboliques, le système intégré de traitement décrit par Kolkman se développe de manière différente selon les représentations et la correspondance sollicitée par la tâche. De ce fait, les correspondances vers un mot-nombre évoluent très peu, tandis que celles vers un nombre écrit ou d'un nombre écrit vers une grandeur évoluent. Nous pensons que le système intégré de traitement numérique continuerait de se développer et de se préciser au fur et à mesure des sollicitations de transcodage et de mises en correspondance. Mais ce système semble davantage lié - au moins pour les élèves français - à la taille du champ numérique enseigné qu'à la seule modalité impliquée. En effet, les progressions mathématiques des programmes officiels obligent à une avancée progressive dans la taille des nombres au fil des niveaux de scolarisation. Ainsi, au CP, la taille des nombres enseignée est limitée jusqu'à 100 tandis qu'au CE1, elle peut atteindre 1000.

Praete et Desoete (2014) ont réalisé le même type d'étude chez des enfants scolarisés de la grande section de maternelle au milieu du CE1. Les enfants doivent réaliser une tâche de *mapping* entre un nombre arabe écrit, un nombre écrit prononcé à voix haute ou une quantité de points avec une position sur une ligne numérique. Leurs résultats indiquent que la variabilité et les erreurs dans la mise en correspondance diminuent avec l'âge pour les trois types de représentations. Comparativement à leur étude, nous avons apporté des indications supplémentaires sur deux aspects : nous poursuivons l'analyse jusqu'à 9 ans (milieu de l'année de CE2) et nous avons également pris en compte les capacités de *mapping* inverse, c'est-à-dire de l'analogique vers le symbolique. Il semble pertinent de considérer également cette direction de traitement étant donné que jusqu'à 8 ans on observe des différences notamment lorsque la modalité orale est impliquée.

Les capacités de mises en correspondance de deux représentations (notamment analogique et symbolique) semblent se développer plus lentement et plus tardivement que les habiletés de transcodage symbolique (effet plafond à 9 ans), alors que la taille du champ numérique est supérieur pour les items de transcodage. De plus, à 9 ans, il existe encore une grande marge de progression sur les habiletés de *mapping* (50%). Nous pouvons envisager au moins deux hypothèses à cet égard.

La première est que dans les programmes scolaires habituels, le développement des habiletés de *mapping* prend plus de temps que l'acquisition des codes et du transcodage. Ainsi, les capacités liées au *mapping* et à la LNM demandent plus d'années d'apprentissage.

La seconde hypothèse est que les capacités de mise en correspondance resteront moyennes parce qu'il n'y a que très peu d'activités sollicitant cette activité dans les programmes habituels.

Dans les deux cas, nous pensons que l'entrainement à l'estimation peut réellement apporter une contribution aux apprentissages et au développement de la précision des représentations et à la fluidité de leur appariement.

Conclusion générale

Depuis quelques décennies, un point d'intérêt particulier est porté à l'étude des habiletés mathématiques et de leurs remédiations notamment au regard des évaluations nationales et internationales sur le niveau mathématique des élèves français. Longtemps considérés comme dénués de toute habileté dans ce domaine, on a tout d'abord découvert que les bébés font preuve très précocement de compétences numériques rudimentaires (Antell et Keating, 1983 ; Starkey et Cooper, 1980 ; Xu et Spelke, 2000). C'est sur la base de ces premières capacités que viendraient ensuite se greffer les compétences numériques plus complexes, notamment de calcul symbolique. Une difficulté particulière pour les apprentissages réside dans l'existence de représentations numériques diverses et variées liées de manière arbitraire et non-intuitive (Fayol, 2012 ; Mirassou in Chokron et Démonet, 2010). La représentation numérique analogique serait ainsi la première à apparaître au cours du développement. C'est cette représentation qui est sollicitée dans les habiletés numériques précoces des bébés. Il s'agit d'une représentation non-verbale qui apporte une information sémantique sur la grandeur. Les représentations numériques à construire sont symboliques et verbales (orale et écrite). Le défi de l'enseignement scolaire est donc de faire acquérir et maîtriser ses diverses représentations pour permettre la résolution de problèmes arithmétiques.

Faire des mathématiques, c'est donc être en mesure de mobiliser différents systèmes de représentations et de traitements numériques. Ainsi, savoir mettre en correspondance (*mapping*) les représentations et les lier de manière bidirectionnelle semble particulièrement important pour favoriser le développement des habiletés mathématiques. Si la correspondance entre les deux représentations symboliques (orale et écrite) est largement enseignée, il n'y a que très peu d'apprentissages sollicitant les connexions entre les symboles numériques et leur signification véhiculée par la représentation analogique sous forme de grandeur. Le développement du sens des nombres et du calcul passe pourtant par ces connexions et les correspondances entre représentations. Redonner du sens aux symboles et aux opérations via le *mapping* entre la représentation analogique et la représentation symbolique permet également à chacun de s'approprier le système verbal des nombres.

Cela semble d'autant plus pertinent que l'existence d'un lien fort entre les capacités de *mapping* et les performances mathématiques ultérieures est désormais bien décrit dans la littérature (Durand, Hulme, Larkin et Snowling, 2005 ; Gilmore, McCarthy et Spelke, 2010 ; Inglis, Attridge, Batchelor et Gilmore, 2011 ; Libertus, Feigenson et Halberda, 2013 ; Mazzocco, Feigenson et Halberda, 2011). Nous défendons l'utilisation des situations d'estimation numérique sur la LNM comme moyen d'exercer le *mapping* entre représentations. Les situations d'estimation permettent de solliciter le *mapping* sans toutefois être trop contraintes par le système de calcul exact et le langage. On peut ainsi l'utiliser auprès d'enfant en cours d'apprentissage ou lorsque le développement se fait de manière atypique en stimulant le système de calcul approximatif. Nous mobilisons ainsi les intuitions arithmétiques élémentaires pour chercher à améliorer la représentation des nombres et des calculs, et cela en se référant continuellement au sens du nombre (Vilette, 2008 ; Vilette, Mawart et Rusinek, 2010 ; Vilette et Schneider, 2011).

Intérêt des activités d'estimation numérique au niveau pédagogique et rééducatif

L'objet du présent travail était avant tout d'analyser d'un point de vue développemental les intérêts éducatifs et rééducatifs des activités d'estimation numérique. Pour cela, nous avons utilisé un logiciel (L'''*Estimateur*'') conçu pour solliciter la mise en correspondance entre les représentations à travers l'estimation. Ce dispositif a été testé dans deux études pour en démontrer l'intérêt d'une part auprès d'enfants typiques scolarisés en classe de Cours Préparatoire, d'autre part auprès d'enfants et adolescents atteints du syndrome génétique de la trisomie 21. Nous avons vu que, relativement à ce qui est réalisé habituellement, cela s'avère particulièrement bénéfique pour les deux types de population, typique et atypique.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous avons développé plus spécifiquement l'apport de l'estimation au niveau pédagogique. Plusieurs études avaient également étudié les effets de ce type d'activité suite à un court entraînement et pas toujours dans le développement typique (Hyde et al., 2014 ; Kucian, Grond, Rotzer, Henzi, Schönmann, Plangger, Gälli, Martin et von Aster , 2011 ; Obersteiner, Reiss et Ufer, 2013 ; Siegler et Ramani, 2008 ; Wilson, Dehaene, Pinel, Revkin, Cohen et Cohen, 2006). En mettant en place un entraînement régulier à l'estimation dans le programme de mathématique en CP (progression ACE), nous constatons que cela participe à l'amélioration des performances mathématiques, comparativement aux programmes utilisés habituellement pas les enseignants. Bien sûr, ces effets ne sont pas liés uniquement aux activités sur l'*Estimateur* mais probablement à la synergie entre les différents aspects que nous proposons dans la progression ACE. Toutefois, nous observons un effet plus important lorsque, parmi tous les enfants qui ont réalisé la progression ACE, nous distinguons ceux qui ont pu réaliser l'entraînement à l'estimation par rapport à ceux pour qui cela n'a pas été possible. Ainsi, mettre en place des activités d'appariement entre représentations permet à la fois d'améliorer les performances en mathématiques mais également d'améliorer la précision des représentations numériques verbales.

De plus, ce type de dispositif apparaît particulièrement pertinent pour les enfants dont le milieu socio-économique est faible, puisqu'ils en bénéficient encore davantage. Les élèves scolarisés en milieu RRS atteignent alors un niveau de performance similaire aux élèves contrôles scolarisés en milieu ordinaire. Il semblerait que ces activités bénéficient à la réduction des inégalités au niveau des performances scolaires en mathématiques (Wilson, Dehaene, Dubois et Fayol, 2009).

Dans la troisième partie, nous avons cette fois étudié l'intérêt des activités d'estimation au niveau rééducatif. Pour cela, nous avons mis en place un dispositif de remédiation des troubles du nombre et du calcul auprès d'enfants et d'adolescents atteint de trisomie 21. Une remédiation basée sur l'estimation et le calcul approximatif semble avoir plus d'effets auprès de cette population que les dispositifs de remédiations symboliques et de calcul exact. Malgré un système numérique approximatif (ANS) efficient – bien qu'élaboré plus tardivement dans cette population - il semblerait que les troubles numériques soient en partie liés aux difficultés langagières. Ainsi, l'acquisition de l'ANS semble, en effet, se réaliser indépendamment du langage. Grâce à l'efficience de l'ANS, le développement des habiletés mathématiques est possible, à condition toutefois que les apprentissages ne soient pas centrés uniquement sur les représentations symboliques et verbales. Nos résultats sont en accord avec les auteurs qui considèrent que les apprentissages numériques sont spécifiquement dépendants à l'ANS (Dehaene, 1997 ; Gilmore, McCarthy et Spelke, 2007 ; 2010 ; Holloway et Ansari, 2008 ; Lipton et Spelke, 2005 ; Park et Brannon, 2013). Ce système serait indispensable aux apprentissages symboliques ultérieurs (Dehaene, 2005 ; Hubbard, Diester, Cantlon, Ansari, Opstal et Troiani, 2008). Donner du sens à ces symboles par des activités d'estimation numérique permet à la fois d'améliorer les compétences mathématiques non-symboliques et approximatives ainsi que les compétences numériques symboliques et exactes.

Ces deux études expérimentales nous permettent d'appuyer l'intérêt de l'estimation numérique dans le développement des habiletés numériques. L'entraînement au *mapping* permet d'accéder à l'information sémantique contenue au sein de chaque représentation sans créer de dépendance contextuelle. Ce dispositif s'avère bénéfique au niveau éducatif et au niveau rééducatif, bien qu'il soit nécessaire de l'adapter à chaque contexte.

<u>Quelles sont les relations entre les représentations au cours du développement ?</u>

L'ensemble des éléments théoriques évoqués dans l'introduction générale (première partie) ainsi que les résultats issus des deux premières études ont conduit à de nouvelles interrogations, notamment quant au rôle joué par les différentes représentations (symboliques et analogique) et à leurs relations au cours du développement. L'objectif de la quatrième partie était alors de préciser d'un point de vue développemental l'évolution des représentations numériques et leurs interactions chez les enfants typiques. Puisque la remédiation basée sur le *mapping* parait bénéfique, il faut néanmoins mieux comprendre ces aspects pour savoir quelles sont les représentations à mettre en correspondance prioritairement. Pour cela, nous avons réalisé une étude transversale auprès d'enfants typiques (âgés de 6 à 9 ans), dans laquelle nous avons évalué l'évolution de chaque représentation ainsi que de chaque mise en correspondance (par *mapping* ou transcodage). Inspirés du modèle de traitement des nombres et du calcul de Dehaene, nous avons cherché un moyen d'évaluer chaque relation. Il s'agissait de préciser quelles sont les représentations ou les correspondances qui se développent en premier au cours des apprentissages numériques scolaires.

Les rares études qui s'y sont intéressées ne l'ont fait que jusqu'à 5 ans alors que les premières années de scolarisation primaire centrent leurs apprentissages sur l'acquisition des codes numériques symboliques. Ces études indiquaient que pour les petits nombres (inférieurs à 6), les enfants sont en mesure dès l'âge de 5 ans de réussir toutes les épreuves de *mapping* (effet plafond) et de manière directionnelle (Benoit et al., 2013). Avant 5 ans, les enfants apprendraient à mettre en correspondance les mots-nombres avec une rangée de points, puis les chiffres arabes avec une rangée de points et enfin les mots-nombres et les chiffres arabes pour les numérosités jusqu'à 6. Mundy et Gilmore (2009) ont évalué les performances de *mapping* bidirectionnelles chez des enfants tout-venant à 6 et à 8-9 ans. Leurs résultats indiquent, outre une représentation plus précise des nombres pour les enfants plus âgés, des représentations plus précises dans le *mapping* non-symbolique vers symbolique et inversement. Toutefois, ils ne distinguent pas l'oral et l'écrit au niveau des représentations symboliques, et ne spécifient pas le développement de ces compétences entre 6 à 9 ans.

Notre étude montre que, malgré un effet plafond à 5 ans dans l'étude de Benoit et ses collaborateurs, chaque type de représentation et de *mapping* continue à se développer jusqu'à 9 ans. En fait, il semblerait qu'au cours du développement la taille des nombres ait une incidence plus importante que le type de représentation concerné. Ainsi, en fonction des champs numériques étudiés à chaque niveau d'âge, les représentations se précisent continuellement et les habiletés de mise en correspondance poursuivent leur développement et s'affinent sur la ligne numérique mentale. C’est comme si les représentations et leurs connexions évoluaient de manière spiralaire en fonction de l’exposition à de nouveaux nombres.

Puisque nous avons étudié ces aspects jusqu’à 9 ans, il n’est pas possible de définir le développement de ces éléments après ce niveau d’âge. Il n’en reste pas moins qu’à 9 ans, il n’y a que peu d’effet plafond pour les capacités liées aux nombres jusqu’à 100 ou de 4 chiffres. On observe globalement que les performances à l’écrit sont plus développées, notamment dans la mise en correspondance. Les performances propres à chaque représentation avoisinent en moyenne 70% de réussite mais ne se développent pas entre 6 et 9 ans. Les habiletés de *mapping* se développent principalement entre 6 et 8 ans pour les nombres jusqu’à 100, quel que soit le code utilisé et la direction de la correspondance. Elles continuent de se développer entre 8 et 9 ans mais de manière nettement moins marquée. Toutefois, un fort potentiel de développement de ces compétences persiste à 9 ans. Seules les performances de transcodage des nombres jusqu’à 4 chiffres semblent atteindre un plafond à 9 ans. Leur développement est très fort jusqu’à 8 ans mais se poursuit ensuite.

Ainsi, plusieurs éléments importants ressortent de cette étude :

1) En dépit du développement des habiletés arithmétiques, les capacités de représentation de chaque code sont semblables et ne se développent pas entre 6 et 9 ans.

   Ce résultat n’est pas en accord avec les données de la littérature. Etant donné l’impact des apprentissages symboliques sur le développement de la représentation analogique et de la LNM nous nous attendions à observer une évolution des performances à la tâche de comparaison relative de deux quantités (évaluant la représentation du code analogique). Ce résultat amène à un constat : le sens des nombres et du calcul, contenu dans la représentation analogique, semble atteindre un plafond dès l’âge de 6 ans. On peut alors se demander à quel âge précisément est atteint ce plafond ? Quelle est la place des apprentissages scolaires dans le développement des capacités de représentation analogique ? En réalité, si les performances dans la tâche de comparaison relative de deux quantités n’évoluent pas de 6 à 9 ans, il n’en demeure pas moins que les capacités de la LNM évoluent puisque les estimations se précisent et qu’il y a de moins en moins d’erreurs dans les tâches de *mapping* avec l’âge. De plus, il n’est pas exclu que la tâche de comparaison ne soit pas suffisamment sensible après 6 ans, ce qui expliquerait qu’on ne trouve pas d’évolution. Enfin, le plafond atteint est à 70% de réussite, performance semblable à celle de l’adulte.

1) Les capacités de transcodage symbolique se développeraient globalement avant les capacités de *mapping,* avec une légère avance pour la lecture de nombres.

Ce résultat est très important dans la compréhension du développement des compétences arithmétiques chez l'enfant. Si les capacités de transcodages symboliques se développent avant les compétences de *mapping* cela peut indiquer que les enfants mettent en relation le nombre arabe écrit et le mot-nombre avant de mettre en correspondance ces nombres symboliques avec les grandeurs qui leur sont associées. Reste à savoir si cela se fait plus ou moins spontanément ou seulement en lien avec les apprentissages scolaires.

2) Dans un dispositif scolaire classique, le développement efficient des capacités de mise en correspondance prend du temps, même après les principales acquisitions scolaires.

Comme nous l'avons exposé plus haut, les capacités de *mapping* se développent probablement de manière spiralaire et continuellement avec l'acquisition des nombres (et éventuellement aussi du calcul). Ces habiletés continueraient de se mettre en place, même après que les représentations symboliques soient maîtrisées.

3) Les progressions mathématiques classiques ne permettent pas suffisamment d'exercer les connexions entre les différentes représentations numériques.

Ce point a d'importantes retombées au niveau éducatif. Les progressions actuelles ne semblent pas permettre d'accéder à une maîtrise fine et précise des représentations alors que cet aspect s'avère indispensable pour ''faire des mathématiques''. Faut-il soupçonner alors que ces lacunes soient, au moins en partie, impliquées dans les mauvais résultats des élèves français dans les évaluations nationales et internationales ? Et si une des clefs était justement l'entraînement à l'estimation numérique ?

4) Enfin, il semble que globalement, les capacités de *mapping* ne soient pas dépendantes du code symbolique mobilisé ou de la direction de traitement. L'ensemble de ces habiletés se développerait de manière relativement conjointe.

Que faut-il alors mettre en correspondance précisément ?

En l'état actuel des recherches, il semblerait que ce n'est pas tant le type de représentation mobilisée qui importe que la taille du champ numérique. Ainsi, il semble nécessaire de mettre en correspondance continuellement l'ensemble des représentations entre-elles au fur et à mesure des champs numériques abordés et des opérations mathématiques enseignés. Il faut néanmoins encore apporter d'autres preuves empiriques à l'appui de cette analyse.

Nous continuons actuellement nos investigations auprès des enfants scolarisés en CP en essayant d'étendre le dispositif ACE à d'autres niveaux de classe, notamment le CE1. Nous pensons qu'en continuant de solliciter la mise en correspondance entre les représentations tout au long des apprentissages,- et cela quelle que soit la taille des nombres et la nature des opérations enseignées - nous pourrons continuer à mieux faire comprendre et apprendre les mathématiques aux élèves.

Quelles explications pouvons-nous trouver aux performances plus faibles observées aux tâches impliquant le code verbal oral par rapport à celles impliquant l'écrit ?

Comme nous l'avons suggéré précédemment, l'oral des nombres est un apprentissage lent et complexe. S'il est assez facilement utilisé au départ, surtout pour les nombres jusqu'à 10, il est ensuite source de difficultés, notamment à cause du système langagier français. Nous avons observé dans notre dernière étude que les tâches sollicitant la modalité orale sont souvent moins bien réussies que leur équivalent en modalité écrite.

Notre principale interrogation concerne ici le rôle de la représentation verbale orale dans les apprentissages ultérieurs. Est-ce que le développement moindre entre 6 et 9 ans de la modalité orale est lié : 1/ à une absence de nécessité de l'oral lorsque le système numérique écrit est en cours d'apprentissage? ; 2/ Et/ou à un développement décalé entre la modalité orale qui se développe d'abord sur les petits nombres, puis - seulement après l'apprentissage de l'écrit - sur les plus grands nombres?

Si la représentation orale n'est pas utilisée dans les tâches numériques (sous forme de recodage phonologique par exemple), il est possible que pour traiter un nombre à l'oral, nous privilégions assez rapidement au cours du développement un recodage écrit (sous forme d'une trace mnésique visuelle).

Prenons l'exemple d'une tâche de comparaison de deux nombres à l'oral. Nous avons constaté que les performances et la vitesse de réponse des enfants de 6 à 9 ans étaient inférieures à celles de la même épreuve à l'écrit. Trois explications sont possibles :

- soit les élèves n'utilisent que le code oral mais il n'est pas suffisamment efficient pour permettre une réponse rapide,
- soit les élèves se réfèrent à l'idée de grandeur qu'ils se font de chaque nombre pour les comparer. Toutefois, si tel était le cas, les temps de réponse seraient certainement inférieurs puisque les capacités de l'ANS sont assez efficientes dès 6 ans,
- soit les élèves pratiquent le recodage écrit mais ont besoin d'un temps important car il n'est pas suffisamment fluide. La mémoire de travail jouerait ici un rôle primordial.

Il ne nous semble pas possible aujourd'hui de trancher quant à ces aspects. Néanmoins, le recodage écrit nous semble être l'hypothèse la plus plausible et la plus adaptée sur le plan écologique.

Quelles précisions peuvent apporter nos résultats aux modèles de traitement du nombre et du calcul ?

Relativement au modèle de Dehaene (1995), nous avons tenté de mieux préciser le développement des trois types de représentations entre 6 et 9 ans. Nous faisons ainsi état, tout comme cela est le cas dans le modèle de Von Aster et Shalev (2007), d'une évolution progressive dans la mise en place et dans l'efficience de chaque système de traitement et de chaque type de représentations.

Toutefois, nous pensons apporter des éléments quant à la dynamique entre les différentes représentations durant le développement. En effet, nous avons montré que chaque code ne se développe par de manière isolée mais plutôt en imbrication, et également que le code verbal oral ne semble pas nécessairement un prérequis à l'acquisition ultérieure du code arabe écrit comme cela peut être décrit dans le modèle de Von Aster et Shalev.

Tout d'abord, le principal élément qui viendrait compléter les modèles de traitement du nombre et du calcul existant est cette hypothèse de spiralité dans le développement des représentations numériques et de leurs relations. Pour Von Aster et Shalev, même si chaque étape d'acquisition d'un type de représentation est un préalable à l'étape suivante, les relations qui existent entre ces représentations ne sont pas précisées. Cela donne l'impression qu'après la représentation précédente acquise, il n'y a plus aucun développement possible de cette représentation. Or, nous avons montré dans la dernière étude qu'en réalité les représentations semblent continuellement se développer.

Enfin, d'après Von Aster et Shalev, le code verbal oral et un prérequis nécessaire à l'acquisition du code verbal écrit. Toutefois, nous avons constaté que l'efficience du système verbal oral n'est pas indispensable au développement du système arabe écrit. Les effets observés de l'entraînement à la mise en correspondance chez des personnes atteintes de trisomie 21 pourraient également confirmer ce constat. En effet, les résultats ont montré que ces personnes sont plus performances en mathématiques non-symboliques et symboliques après l'entraînement. Puisque ces personnes sont déficitaires sur le plan verbal, et donc au niveau de la représentation numérique orale, il n'a pas été nécessaire de maîtriser le code verbal oral pour développer leurs habiletés numériques.

Limites et perspectives

Notre étude comporte au moins trois limites importantes qui sont à considérer dans l'interprétation des résultats.

Premièrement, dans la première étude de ce travail, il n'a pas été possible de mesurer les effets individuels de chaque composante de la progression (les situations de calcul, la résolution de problème et le calcul mental). Il est possible que pour chacune de ces composantes nous obtenions les mêmes résultats que pour l'estimation. Ces quatre domaines sont essentiels pour le développement des apprentissages numériques et peuvent, s'ils ne sont pas appliqués en classe, réduire la progression des élèves en classe de CP.

Si l'entraînement à l'estimation numérique semble bénéfique, il semble également indispensable de mesurer les effets de cet entraînement à moyen et court terme. Bien que nous disposons de plusieurs arguments en faveur d'une amélioration ultérieure des performances mathématiques, nous devons néanmoins mesurer spécifiquement l'importance cette amélioration ? Est-ce qu'elle existe pour les élèves tout-venant comme pour les enfants au développement atypique ? Est-ce qu'il est nécessaire de maintenir un entraînement récurrent à ce type d'activité ? Est-ce qu'un entraînement de ce type pourrait permettre de prévenir l'apparition d'un trouble spécifique des apprentissages mathématiques ou tout du moins d'en limiter la gravité ?

Deuxièmement, dans la seconde étude de ce travail, nous avons suivi des enfants et adolescents atteints de trisomie 21 avec un protocole de remédiation des troubles numériques. Si les résultats sont plutôt convaincants, il conviendrait cependant de les répliquer auprès d'un échantillon plus important afin de vérifier que ce type d'entraînement est adapté à la variété des profils observés dans cette pathologie. De plus, il serait nécessaire d'évaluer le maintien des effets observés à moyen et long terme. Pour cela, une étude longitudinale où les enfants seraient réévalués plusieurs semaines (ou mois) après la fin de l'intervention pourrait être informative. Nous pourrions ainsi nous assurer que ces effets sont bien le résultat d'une amélioration profonde au niveau de la représentation des nombres et de l'acquisition du sens des nombres et du calcul.

Troisièmement, dans l'étude concernant l'évolution des types de représentation, plusieurs limites sont à mentionner au niveau méthodologique. La complexité de cette étude nous a contraint à élaborer une méthodologie qui ne permet pas toujours de mesurer exactement ce qui était visé initialement. Par exemple, dans les épreuves utilisées pour évaluer les capacités de représentation arabe écrite et verbale orale (épreuve de comparaison de deux nombres), nous ne pouvons pas nous assurer de l'activation d'une autre modalité pour la réalisation de la tâche. En effet, pour comparer deux nombres à l'oral, rien n'indique que l'élève ne recourt à un recodage écrit pour répondre.

De plus, nous manquons de résultats sur l'ensemble de nos tâches (avant 6 ans et après 9 ans) pour comprendre quand débute le développement d'une habileté et quand il s'arrête. Une étude longitudinale conduite de la maternelle jusqu'au moins la fin de l'école primaire permettrait d'analyser plus finement l'évolution des représentations numériques avec l'âge et avec la scolarité; elle permettrait aussi et surtout de préciser les relations développementales entre les codes et pourquoi pas, modéliser encore plus fidèlement le développement des traitements numériques. En combinant une étude de ce type avec des données en neuro-imagerie, nous pourrions peut-être répondre aux interrogations quant aux origines des troubles numériques, ou à la place du langage dans le développement des acquisitions.

Il serait également très intéressant de réaliser une étude transversale sur les trois types de représentations et leurs relations durant la mise en oeuvre en classe de séances d'entraînement à l'estimation numérique. Nous pourrions ainsi voir si les élèves développent différemment leurs représentations et leurs capacités d'appariement suite à ce type d'entraînement. Ce type d'étude nous permettrait également d'apporter des éléments de réponse aux questions que nous avons soulevées dans cette discussion.

Annexes

Annexe A. Réponses données par les participants T21 pour chaque quantité, pourcentage total de réponses exactes par participant et moyenne des participants T21 pour chaque numérosités.

T21	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**%**
SUJ1	10	6	6	17	12	7	15	15	18	18	15	21	23	23	23	13,3
SUJ2	5	6	8	8	10	8	13	13	17	20	15	22	15	20	22	26,7
SUJ3	5	6	8	8	10	10	17	15	10	10	14	13	23	20	17	20,0
SUJ4	6	10	5	4	18	22	13	16	23	11	12	7	20	15	23	0,0
SUJ5	5	7	6	10	12	11	12	14	11	11	18	13	19	20	22	6,7
SUJ6	5	5	7	16	12	10	14	22	18	20	20	23	23	23	22	20,0
SUJ7	5	7	8	10	14	11	17	17	3	17	7	23	22	23	20	6,7
SUJ8	3	8	7	12	13	6	16	19	19	7	13	11	21	15	17	6,7
SUJ9	5	4	6	4	6	8	7	18	3	20	7	19	23	17	19	13,3
SUJ10	5	6	7	5	8	10	12	11	11	19	9	17	22	23	21	6,7
SUJ11	5	6	10	9	10	11	12	12	13	13	16	17	14	19	20	26,7
SUJ12	4	11	5	21	8	10	6	16	12	19	12	23	15	18	21	13,3
SUJ13	5	6	8	6	8	12	10	13	8	9	16	20	18	18	15	20,0
SUJ14	3	9	6	5	5	4	18	6	19	21	8	23	5	22	20	0,0
SUJ15	5	10	16	2	10	10	13	2	12	20	13	2	12	20	14	13,3
SUJ16	5	7	7	13	9	14	12	14	19	19	18	12	21	19	21	20,0
SUJ17	7	6	6	8	9	12	13	13	15	12	16	10	18	17	10	20,0
SUJ18	6	6	1	5	2	6	4	3	8	2	4	1	7	15	5	6,7
MOY	**5**	**7**	**7**	**9**	**10**	**10**	**12**	**13**	**13**	**15**	**13**	**15**	**18**	**19**	**18**	**13**

Annexe B. Réponses données par les participants contrôle appariés sur l'âge chronologique pour chaque quantité, pourcentage total de réponses exactes par participant et moyenne du groupe pour chaque numérosités.

Typ AC	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**%**
AC1	4	5	8	7	8	10	7	9	9	9	10	12	10	11	14	6,67
AC2	5	6	7	11	9	10	9	14	14	17	14	14	12	15	18	33,33
AC3	5	5	7	7	8	8	7	9	13	13	9	12	19	16	15	20,00
AC4	4	5	6	7	8	11	12	10	10	11	18	8	15	21	14	0,00
AC5	4	8	5	4	4	6	7	10	11	10	14	9	12	12	14	0,00
AC6	5	6	8	8	8	12	10	11	16	10	14	16	16	21	14	26,67
AC7	5	6	6	6	6	7	8	8	11	12	14	12	13	15	16	13,33
AC8	4	5	5	6	6	5	9	7	9	8	8	9	12	11	10	0,00
AC9	5	6	6	8	8	9	11	10	9	8	16	10	12	13	15	26,67
AC10	5	6	7	8	8	10	12	15	12	16	14	14	16	14	18	33,33
AC11	5	6	7	9	8	9	15	12	11	15	16	14	13	18	20	33,33
AC12	5	5	6	8	9	10	9	12	11	8	13	18	14	13	17	33,33
AC13	5	6	7	10	18	11	10	11	15	16	14	12	17	16	11	26,67
AC14	5	5	6	6	8	8	12	9	7	7	11	15	8	15	13	6,67
AC15	5	5	6	7	7	8	9	10	8	14	13	12	14	19	14	13,33
AC16	4	5	6	7	7	8	9	12	13	12	14	15	15	20	22	13,33
AC17	5	6	7	8	9	9	14	12	15	14	14	17	17	18	16	60,00
AC18	5	6	7	8	9	11	13	15	11	14	18	17	17	16	17	46,67
MOY	**5**	**6**	**7**	**8**	**8**	**9**	**10**	**11**	**11**	**12**	**14**	**13**	**14**	**16**	**16**	**22**

Annexe C. Réponses données par les participants contrôle appariés sur l'âge mental pour chaque quantité, pourcentage total de réponses exactes par participant et moyenne du groupe pour chaque numérosités.

Typ AM	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**%**
AM1	4	5	7	10	12	14	14	9	13	17	11	16	14	18	15	20
AM2	3	4	4	5	7	6	5	4	10	17	16	15	17	18	13	13,33
AM3	5	4	4	4	20	5	5	21	20	14	16	4	23	13	23	13,33
AM4	7	7	4	8	12	13	8	11	20	15	14	9	14	12	20	6,67
AM5	5	6	6	5	6	8	10	9	8	8	9	11	14	14	14	13,33
AM6	5	10	5	7	15	11	11	11	11	13	17	14	13	12	15	13,33
AM7	4	6	9	5	11	9	9	7	9	8	12	8	9	13	10	6,67
AM8	7	4	8	10	5	6	4	7	12	12	5	7	7	7	9	0,00
AM9	4	5	5	8	9	10	5	10	9	22	7	23	10	13	10	20,00
AM10	4	4	4	9	7	15	5	16	18	7	18	22	17	15	18	6,67
AM11	5	6	4	5	5	7	7	6	15	15	14	17	15	15	20	13,33
AM12	5	6	5	8	7	8	8	10	6	11	9	12	8	13	11	20,00
AM13	5	5	6	6	5	5	10	9	8	16	16	17	17	11	14	13,33
AM14	5	5	6	6	6	7	15	8	13	9	8	19	10	17	18	13,33
AM15	4	4	5	5	4	8	9	8	9	10	7	8	11	8	10	0,00
AM16	5	5	6	6	6	7	15	8	13	9	8	19	10	17	18	13,33
AM17	4	5	5	5	6	12	15	19	11	15	15	17	14	17	18	6,67
AM18	5	6	5	7	14	8	14	15	14	14	14	13	13	15	16	13,33
MOY	**5**	**5**	**5**	**7**	**9**	**9**	**9**	**10**	**12**	**13**	**12**	**14**	**13**	**14**	**15**	**11**

Annexe D. Caractéristiques des participants T21 du groupe AE (apprentissage Approximatif d'abord) et du groupe EA (apprentissage Exact d'abord) et résultats au pré-, post 1 et post-test 2 (ZAREKI-R) ainsi que différence de résultats entre le pré-test et le post-test 2.

Nom	Gpe	AC	Pré-test	Post-test 1	Post-test 2	Diff pré/pos2
LUCIE	A	12,9	15	35	49	34
ORIANE	A	14,4	55	79	77	22
BORIS	A	14	19	42	40	21
OLIVE	A	13	16	27	27	11
ROGER	A	11	12	27	28	16
ADRIEN	A	10,2	26	31	27,5	1,5
LEANE	A	9,1	19,5	37	27,5	8
RAMZA	A	14,6	47	37	45	-2
LUCIEB	A	15	31,5	43	40	8,5
NICOLAS	E	10	30,5	43,5	54,5	24
MOUNIR	E	10,8	33	25	37	4
BENEDICTE	E	15,1	31,5	34	38	6,5
VICTOR	E	15,1	28	23,5	25,5	-2,5
REMI	E	8,4	30	33,5	34,5	4,5
CORALIE	E	15,6	25	26,5	34,5	9,5
ANTHONY	E	8,5	34	32,5	27	-7

Annexe E. Copie du cahier de passation : épreuves de Lecture et Dictée de nombres

Date : ……./……./…….

Code identification :………… Classe : ………………

1/ Lecture & dictée de nombres

LECTURE			DICTEE		
Nombre	Réponse	Type	Nombre	Réponse	Type
3082			5700		
50			1		
48			38		
1900			14		
969			272		
305			5		
15			42		
72			8033		
60			75		
6			686		
111			3		
9100			66		
2			3105		
726			101		
99			91		
138			756		
6485			19		
687			4		
5008			4658		
9			96		
100			7		
30			55		
4217			169		
10			1200		
0			503		

Annexe F. Cahier de passation : épreuves de Comparaison orale et écrite de deux nombres

CAHIER DE PASSATION CODES ET MATHEMATIQUES | 3

6/ Comparaison orale et écrite de 2 nombres

Renommer : code identification.CE ou code identification.CO

Compare écrit			Compare oral		
Items	R	TR	Items	R	TR
13 - 31			51 - 49		
79 - 87			465 - 546		
1090 - 1070			62 - 602		
296 - 298			2009 -9002		
654 - 546			800 - 108		
9768- 9766			692 - 392		
69 - 96			34081-3481		
347 - 547			46 - 64		
2188 - 1288			1086 - 186		
941 - 841			88 - 82		
608 - 68			941 - 861		
45 - 65			6606- 6066		
596 - 659			380 - 680		
305 - 35			1 - 3		
3 - 2			8 - 6		
72 - 612			65 - 85		
803 - 804			91 - 85		
7 - 9			22 - 82		
4444- 3333			1230 - 1213		
3073- 3023			200 - 102		

Bibliographie

Alibali, M. W., & DiRusso, A. A. (1999). The function of gesture in learning to count: More than keeping track. *Cognitive development*, *14*(1), 37-56.

Ansari, D., Donlan, C. et Karmiloff-Smith, A. (2007). Typical and atypical development of visual estimation abilities. *Cortex*, *43*, 758-768.

Ansari, D., Donlan, C., Thomas, M. S., Ewing, S. A., Peen, T., & Karmiloff-Smith, A. (2003). What makes counting count? Verbal and visuo-spatial contributions to typical and atypical number development. *Journal of Experimental Child Psychology*, *85*(1), 50-62.

Antell, S. E., & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child development*, 695-701.

Ashcraft, M. H., & Moore, A. M. (2012). Cognitive processes of numerical estimation in children. *Journal of experimental child psychology*, *111*(2), 246-267.

Ashcraft, M. H. (1992). Cognitive arithmetic: A review of data and theory. *Cognition*, *44*(1), 75-106.

Baddeley, A., & Jarrold, C. (2007). Working memory and Down syndrome. *Journal of Intellectual Disability Research*, *51*(12), 925-931.

Baroody, A. J., & Dowker, A. (Eds). (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructive adaptive expertise*. London: Routledge.

Barrouillet, P., & Camos, V. (2003). Savoirs et savoir-faire arithmétiques et leurs déficiences. In M. Kail et M. Fayol (Eds.), Les sciences cognitives et l'école. La question des apprentissages (pp. 307-351). Paris : PUF.

Barrouillet, P., & Thevenot, C. (2013). On the problem-size effect in small additions: Can we really discard any counting-based account?. *Cognition*, *128*(1), 35-44.

Barrouillet, P., Camos, V., Perruchet, P., & Seron, X. (2004). ADAPT: a developmental, asemantic, and procedural model for transcoding from verbal to arabic numerals. *Psychological review*, *111*(2), 368.

Barth, H., Kanwisher, N., & Spelke, E. (2003). The construction of large number representations in adults. *Cognition*, *86*(3), 201-221.

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J., & Spelke, E. S. (2005). Abstract number and arithmetic in preschool children. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *102*(39), 14116-14121.

Bashash, L., Outhred, L., & Bochner, S. (2003). Counting skills and number concepts of students with moderate intellectual disabilities. *International Journal of Disability, Development and Education*, *50*(3), 325-345.

Beckwith, M., & Restle, F. (1966). Process of enumeration. *Psychological Review*, *73*(5), 437.

Bee, H. et Boyd, D. (2008). Les âges de la vie (3ème Ed.). Montréal : Editions du Renouveau Pédagogique

Belacchi, C., Passolunghi, M. C., Brentan, E., Dante, A., Persi, L., & Cornoldi, C. (2014). Approximate additions and working memory in individuals with Down syndrome. *Research in developmental disabilities*, *35*(5), 1027-1035.

Bellugi, U., Lichtenberger, L., Mills, D., Galaburda, A., & Korenberg, J. R. (1999). Bridging cognition, the brain and molecular genetics: evidence from Williams syndrome. *Trends in neurosciences*, *22*(5), 197-207.

Benoit, L., Lehalle, H., & Jouen, F. (2004). Do young children acquire number words through subitizing or counting?. *Cognitive Development*, *19*(3), 291-307.

Benoit, L., Lehalle, H., Molina, M., Tijus, C., & Jouen, F. (2013). Young children's mapping between arrays, number words, and digits. *Cognition*, *129*(1), 95-101.

Berch, D. B., Foley, E. J., Hill, R. J., & Ryan, P. M. (1999). Extracting parity and magnitude from Arabic numerals: Developmental changes in number processing and mental representation. *Journal of experimental child psychology*, *74*(4), 286-308.

Berteletti, I., Lucangeli, D., Piazza, M., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Numerical estimation in preschoolers. *Developmental psychology*, *46*(2), 545.

Bideaud, J. & Lehalle, H. 2002). *Le développement des activités numériques chez l'enfant*. Hermès science publications

Bideaud, J., Meljac, C., & Fischer, J. P. (Eds.). (1991). *Les chemins du nombre*. Presses Universitaire du Septentrion.

Bijeljac-Babic, R., Bertoncini, J., & Mehler, J. (1993). How do 4-day-old infants categorize multisyllabic utterances?. *Developmental psychology*, *29*(4), 711.

Billard, C., & Touzin, M. (Collectif). (2008). *Troubles spécifiques des apprentissages: l'état des connaissances*. Paris : Signes éditions

Bird, G., and Buckley, S.J. (1994). Meeting the educational needs of children with Down syndrome: a handbook for teachers. Portsmouth, England: University of Portsmouth.

Bird, G., & Buckley, S. (2001). Number skills for children with Down syndrome (5-11 years). *Down Syndrome Issues and Information*.

Bird, G., & Buckley, S. (2002). Number skills for teenagers with Down syndrome (11-16 years). *Down Syndrome Issues and Information*.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child development*, *79*(4), 1016-1031.

Brannon, E. M. (2002). The development of ordinal numerical knowledge in infancy. *Cognition*, *83*(3), 223-240.

Brannon, E. M. (2005). The independence of language and mathematical reasoning. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *102*(9), 3177-3178.

Brannon, E. M., Abbott, S., & Lutz, D. J. (2004). Number bias for the discrimination of large visual sets in infancy. *Cognition*, *93*(2), B59-B68.

Briars, D., & Siegler, R. S. (1984). A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology*, *20*(4), 607.

Brigstocke, S., Hulme, C., & Nye, J. (2008). Number and arithmetic skills in children with Down syndrome. doi:10.3104/reviews/2070

Brissiaud, R. Clerc, P., Lelièvre, F. Ouzoulias, A. et Suire, F. (2013). *J'apprends les maths avec Picbille CP*. Editions Retz

Brissiaud, R. Clerc, P., Lelièvre, F. Ouzoulias, A. et Suire, F. (2012). *J'apprends les maths avec Picbille CP*. Editions Retz

Brown, J. H., Johnson, M. H., Paterson, S. J., Gilmore, R., Longhi, E., & Karmiloff-Smith, A. (2003). Spatial representation and attention in toddlers with Williams syndrome and Down syndrome. *Neuropsychologia*, *41*(8), 1037-1046.

Brysbaert, M. (1995). Arabic number reading: On the nature of the numerical scale and the origin of phonological recoding. *Journal of experimental psychology: General*, *124*(4), 434.

Buckley, S. (2001). Reading and writing for individuals with Down syndrome-An overview. *Down Syndrome Issues and Information*.

Buckley, P. B., & Gillman, C. B. (1974). Comparisons of digits and dot patterns. *Journal of experimental psychology*, *103*(6), 1131.

Buckley, S. (2002). Can children with Down syndrome learn more than one language?. *Down Syndrome News and Update*, *2*(3), 100-102.

Buckley, S. (2007). Teaching numeracy. *Down Syndrome Research and Practice, 12*(1), 11-14.

Buckley, S. J., & Bird, G. (2001). Number skills for individuals with Down syndrome-An overview. Portsmouth: Down Syndrome Education International

Buckley, S. J., Horner, V., Wing, T., & Bird, G. (2001). The Numicon approach. *Down's Syndrome Association Journal*, *98*, 18-22.

Buckley, S., & Sacks, B. (1987). The Adolescent with Down's Syndrome: Life for the Teenager and for the Family. Portsmouth : Down's Syndrome Trust.

Butterworth, B. (1999). What counts: How every brain is hardwired for math. New York: Free Press

Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. Trends in cognitive sciences, 14(12), 534-541.

Camos, V. (2003). Counting strategies from 5 years to adulthood: Adaptation to structural features. *European journal of psychology of education*, *18*(3), 251-265.

Camos, V. (2009). Numerosity discrimination in children with Down syndrome. *Developmental neuropsychology*, *34*(4), 435-447.

Camos, V., Barrouillet, P., & Fayol, M. (2001). Does the coordination of verbal and motor information explain the development of counting in children?. *Journal of Experimental Child Psychology*, *78*(3), 240-262.

Camos, V., Fayol, M., & Barrouillet, P. (1999). L'activité de dénombrement chez l'enfant: Double tâche ou procédure?. *L'année psychologique*, *99*(4), 623-645.

Campbell, F. A., & Ramey, C. T. (1994). Effects of early intervention on intellectual and academic achievement: a follow-up study of children from low-income families. *Child development, 65*(2), 684-698.

Cantlon, J. F., & Brannon, E. M. (2007). Basic math in monkeys and college students. *PLoS biology*, *5*(12), e328.

Charmay, R., Dussuc, M.-P., Madier, D. (2009). *Cap Math CP*. Editions Hatier

Carpenter, T. P., (1986). Conceptual Knowledge as a Foundation for Procedural Knowledge. In Hiebert (Ed.) *Conceptual and procedural Knowledge: The Case for Mathematics*, Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Carr, K. S. (1988). How can we teach critical thinking?. *Childhood Education, 65*(2), 69-73.

Casey, W., Jones, D., Kugler, B., & Watkins, B. (1988). Integration of Down's syndrome children in the primary school: a longitudinal study of cognitive development and academic attainments. *British Journal of Educational Psychology, 58*(3), 279-286.

Caviola, S., Mammarella, I. C., Cornoldi, C., & Lucangeli, D. (2012). The involvement of working memory in children's exact and approximate mental addition. *Journal of experimental child psychology*, *112*(2), 141-160.

Caycho, L., Gunn, P., & Siegal, M. (1991). Counting by children with Down syndrome. *American journal on mental retardation, 95*(5), 575-583.

Chazoule, G., Thevenot, C., & Fayol, M. (2012). Améliorer les compétences numériques des enfants trisomiques 21: une question pédagogique et théorique. *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, *120*(21), 561-567.

Chi, M. T., & Klahr, D. (1975). Span and rate of apprehension in children and adults. *Journal of Experimental Child Psychology, 19*(3), 434-439.

Chillier L. (2002) La ligne numérique et les codages du nombre chez l'enfant. In J. Bideaud & H. Lehalle, *Le développement des activités numériques chez l'enfant* (Traité des Sciences cognitives). Ed. Lavoisier

Chillier, L. (1999). Étude des représentations mentales analogiques et digitales des nombres chez l'enfant de 6 à 9 ans (Doctoral dissertation).

Chokron, S. & Demonet, JF. Collectif (2010). *Approche neuropsychologique des troubles des apprentissages*. Paris : Solal

Cognet, G. (2006). NEMI-2, Nouvelle échelle métrique d'intelligence – 2. Editions ECPA Pearson

Cohen, L., & Dehaene, S. (2000). Calculating without reading: Unsuspected residual abilities in pure alexia. *Cognitive Neuropsychology*, *17*(6), 563-583.

Coleman, K. (2003). Using Numicon-a report from a special school. *Down Syndrome News and Update*, *3*(3), 92-93.

Comblain, A. (2001). Fonctionnement mnésique. *Manuel de Psychologie des handicaps. Sémiologie et principes de remédiation*, 17-47.

Comblain, A., & Thibaut, J.P. (2009). Approche neuropsychologique du syndrome de Down. In Poncelet, M, Majerus, S., & Van der Linden, M. (Eds.), Traité de neuropsychologie de l'enfant (pp. 491-524). Marseille : Solal

Cooper, R.O. Jr (1984). Early number development : discovering number space with addition and substraction. In C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills* (pp.157-192), Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates

Cornwell, A. C. (1974). Development of language, abstraction, and numerical concept formation in Down's syndrome children. *American Journal of Mental Deficiency*, *79*(2), 179-90.

Cuneo, D. O. (1982). Children's judgments of numerical quantity: A new view of early quantification. *Cognitive psychology*, *14*(1), 13-44.

de Hevia, M. D., & Spelke, E. S. (2009). Spontaneous mapping of number and space in adults and young children. *Cognition*, *110*(2), 198-207.

Seron, X., Van Lil, M.& Noël, M-P. (1995). La lecture des numéraux arabes chez des enfants en première et en deuxième années primaires: recherche exploratoire. *Archives de Psychologie, 63*, 269-300.

De Smedt, B., & Gilmore, C. K. (2011). Defective number module or impaired access? Numerical magnitude processing in first graders with mathematical difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, *108*(2), 278-292.

Deary, I. J., Strand, S., Smith, P., & Fernandes, C. (2007). Intelligence and educational achievement. *Intelligence*, *35*(1), 13-21.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, *44*(1), 1-42.

Dehaene, S. (1997). *Le cerveau en action*. Paris *: PUF*.

Dehaene, S. (1997). *The Number Sense.* New York : Oxford University Press

Dehaene, S. (2001). Précis of the number sense. *Mind & language*, *16*(1), 16-36.

Dehaene, S. (2005). Evolution of human cortical circuits for reading and arithmetic: The “neuronal recycling” hypothesis. *From monkey brain to human brain*, 133-157.

Dehaene, S. (2009). Origins of mathematical intuitions. *Annals of the New York Academy of Sciences*, *1156*(1), 232-259.

Dehaene, S., & Akhavein, R. (1995). Attention, automaticity, and levels of representation in number processing. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *21*(2), 314.

Dehaene, S., & Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical cognition*, *1*(1), 83-120.

Dehaene, S., & Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex*, *33*(2), 219-250.

Dehaene, S., & Cohen, L. (2000). Un modèle anatomique et fonctionnel de l'arithmétique mentale. *Neuropsychologie des troubles du calcul et du traitement des nombres,* Marseille *: Solal.*

Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, *122*(3), 371.

Dehaene, S., Dupoux, E., & Mehler, J. (1990). Is numerical comparison digital? Analogical and symbolic effects in two-digit number comparison. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *16*(3), 626.

Dehaene, S., Izard, V., Spelke, E., & Pica, P. (2008). Log or linear? Distinct intuitions of the number scale in Western and Amazonian indigene cultures. *Science*, *320*(5880), 1217-1220.

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive neuropsychology*, *20*(3-6), 487-506.

Dellatolas, G., & Von Aster, M. (2006). *Zareki-R, Batterie pour l'évaluation du traitement des nombres et du calcul chez l'enfant*. Editions ECPA Pearson

Deloche, G., & Seron, X. (1987). *Numerical transcoding: A general production model*. England: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

DeStefano, D., & LeFevre, J. A. (2004). The role of working memory in mental arithmetic. *European Journal of Cognitive Psychology*, *16*(3), 353-386.

Donlan DVM Bishop GJ Hitch, C. (1998). Magnitude comparisons by children with specific language impairments: Evidence of unimpaired symbolic processing. *International Journal of Language & Communication Disorders*, *33*(2), 149-160.

Duncan, E. M., & McFarland, C. E. (1980). Isolating the effects of symbolic distance, and semantic congruity in comparative judgments: An additive-factors analysis. *Memory & Cognition, 8*(6), 612-622.

Duncan, E. M., & McFarland, C. E. (1980). Isolating the effects of symbolic distance, and semantic congruity in comparative judgments: An additive-factors analysis. *Memory & Cognition, 8*(6), 612-622.

Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., ... & Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental psychology*, *43*(6), 1428.

Durand, M., Hulme, C., Larkin, R., & Snowling, M. (2005). The cognitive foundations of reading and arithmetic skills in 7-to 10-year-olds. *Journal of Experimental Child Psychology*, *91*(2), 113-136.

Durpaire, M., & Mégard, M. (2010). *Le Nombre au cycle 2.* Collection Ressources pour faire la classe, Ministère de l'Education Nationale, SCEREN

Dykens, E. M., Hodapp, R. M., & Finucane, B. M. (2000). *Genetics and mental retardation syndromes: A new look at behavior and interventions*. Paul H Brookes Publishing.

Ebersbach, M., & Wilkening, F. (2007). Children's intuitive mathematics: The development of knowledge about nonlinear growth. *Child Development*, *78*(1), 296-308.

Ellis, N. (1992). Linguistic relativity revisited : The bilingual word-length effect in working memory during counting, remembering numbers, and mental calculation. In J. Harris (Ed.), *Cognitive Processing in Bilinguals*, (pp. 137-155). New York: Springer – Verlag

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). Mathematics education. *Mahwah, NJ: LEA*.

Guillaume, J.-C., Colomb, J., Charnay, R., Douaire, J. & Valentin, D. (2005). *Ermel – Apprentissages numériques et résolution de problèmes.* Paris : Ermel Hatier

Ewan, C., & Mair, C. (2002). Wiltshire Pilot Project-Numicon (March-July 2001). *Down Syndrome News and Update*, *2*(1), 12-14.

INSERM (2007). *Expertise collective : Dyslexie, Dysorthographie, Dyscalculie. Bilan des données scientifiques*. Paris : Les Editions Inserm

Faragher, R., & Clarke, B. (Eds.). (2013). *Educating Learners with Down Syndrome: Research, Theory and Practice with Children and Adolescents: Research, Theory, and Practice with Children and Adolescents*. London : Routledge.

Fayol, M. (2008). L'acquisition de l'arithmétique. In C. Billard et M. Touzin. *Troubles spécifiques des apprentissages : l'état des connaissances* (pp. 22-27). Paris : Signes Editions

Fayol, M. (1990). L'enfant et le nombre. Lausanne : Delachaux et Niestlé

Fayol, M. (2002). *Production du langage*. Hermès Science Publications

Fayol, M. (2012). *L'acquisition du nombre*. Paris : PUF

Fayol, M., Barrouillet, P., & Marinthe, C. (1998). Predicting arithmetical achievement from neuro-psychological performance: A longitudinal study. *Cognition*, *68*(2), B63-B70.

Fayol, M., Barrouillet, P., & Renaud, A. (1996). Mais pourquoi l'écriture des grands nombres est-elle aussi difficile. *Revue de Psychologie de l'Education*, *1*, 87-107.

Fayol, M., Marinthe, C., & Barrouillet, P. (2004). 2. Compter sur les doigts, une étape nécessaire. *La recherche*, (379), 47-49.

Fayol, M. & Thevenot, C. (2012). The use of procedural knowledge in simple addition and subtraction problems. *Cognition, 123,* pp. 392-403.

Feigenson, L., & Carey, S. (2003). Tracking individuals via object-files: evidence from infants' manual search. *Developmental Science*, *6*(5), 568-584.

Feigenson, L., Carey, S., & Hauser, M. (2002). The representations underlying infants' choice of more: Object files versus analog magnitudes. *Psychological Science*, *13*(2), 150-156.

Feigenson, L., Carey, S., & Spelke, E. (2002). Infants' discrimination of number vs. continuous extent. *Cognitive psychology*, *44*(1), 33-66.

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in cognitive sciences*, *8*(7), 307-314.

Fernandes, D. M., & Church, R. M. (1982). Discrimination of the number of sequential events by rats. *Animal Learning & Behavior*, *10*(2), 171-176.

Fischer J.P. & Bier A.C. (2005). La trisomie 21: Quels développement et apprentissage numériques ? In A. Van Hout, C. Meljac et J.-P. Fischer (Eds), *Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant* (pp. 284-289). Paris: Masson

Fischer, J. P. (1991). Le subitizing et la discontinuité après 3. In C. Meljac, J. Bideaud, et J. P. Fischer (Eds). *Les chemins du nombre*, (pp. 235-258). Lille : Presses Universitaires du Septentrion.

Fischer, M. H. (2001). Number processing induces spatial performance biases. *Neurology*, *57*(5), 822-826.

Fischer, M. H., Mills, R. A., & Shaki, S. (2010). How to cook a SNARC: Number placement in text rapidly changes spatial–numerical associations. *Brain and cognition*, *72*(3), 333-336.

Friso-van den Bos, I., van der Ven, S. H., Kroesbergen, E. H., & van Luit, J. E. (2013). Working memory and mathematics in primary school children: A meta-analysis. *Educational research review*, *10*, 29-44.

Fuson, K. C. (1982). An analysis of the counting-on solution procedure in addition. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 67-81.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag Publishing.

Fuson, K. C., Richards, J., & Briars, D. J. (1982). The acquisition and elaboration of the number word sequence. In *Children’s logical and mathematical cognition* (pp. 33-92). New York: Springer

Gallistel, C. R. (1988). Counting versus subitizing versus the sense of number. *Behavioral and Brain Sciences*, *11*(04), 585-586.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, *44*(1), 43-74.

Geary, D. C. (1994). *Children's mathematical development: Research and practical applications*. Washinton: American Psychological Association.

Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: a 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology*, *47*(6), 1539.

Geary, D. C., Bow-Thomas, C. C., & Yao, Y. (1992). Counting knowledge and skill in cognitive addition: A comparison of normal and mathematically disabled children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *54*(3), 372-391.

Geary, D. C., Hamson, C. O., & Hoard, M. K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, *77*(3), 236-263.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Byrd-Craven, J. (2008). Development of number line representations in children with mathematical learning disability. *Developmental neuropsychology*, *33*(3), 277-299.

Gelman, R. (1972). Logical capacity of very young children: Number invariance rules. *Child Development*, 75-90.

Gelman, R., & Cohen, M. (1988). Qualitative differences in the way Down syndrome and normal children solve a novel counting problem. *The psychobiology of Down's syndrome*, 51-99.

Gelman, R., & Gallistel, C. (1978). Young children's understanding of numbers. Cambridge : Harvard University Press

Gelman, R., & Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: Principles before skill. *Cognition*, *13*(3), 343-359.

Gerstmann J. (1930). Zur symptomatologie der hirnläsionen im übergangsgebiet der unteren parietal-und mittleren occipitalwindung. *Nervenarzt, 3,* 691–695.

Gilmore, C. K., McCarthy, S. E., & Spelke, E. S. (2007). Symbolic arithmetic knowledge without instruction. *Nature*, *447*(7144), 589-591.

Gilmore, C. K., McCarthy, S. E., & Spelke, E. S. (2010). Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition*, *115*(3), 394-406.

Ginsburg, H. P., & Russell, R. L. (1981). Social class and racial influences on early mathematical thinking. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 1-69.

Girelli, L., Lucangeli, D., & Butterworth, B. (2000). The development of automaticity in accessing number magnitude. *Journal of experimental child psychology*, *76*(2), 104-122.

Griffin, S., & Case, R. (1997). Re-thinking the primary school math curriculum: An approach based on cognitive science. *Issues in Education*, *3*(1), 1-49.

Gross-Tsur, V., Manor, O., & Shalev, R. S. (1996). Developmental dyscalculia: Prevalence and demographic features. *Developmental Medicine & Child Neurology*, *38*(1), 25-33.

Habib, M., Noël, M., George-Poracchia, F., & Brun, V. (2011). *Calcul et dyscalculies, Des modèles à la rééducation.* Issy-les-Moulineaux : Elsevier Masson

Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the" Number Sense": The Approximate Number System in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental psychology*, *44*(5), 1457.

Halberda, J., Mazzocco, M. M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, *455*(7213), 665-668.

Halford, G. S. (1993). *Children's understanding: The development of mental load*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hanrahan, J., & Newman, T. (1996). Teaching addition to children. In B. Stratfford & Gunn (Eds.). *New approaches to downs syndrome*, 300-308.

Holloway, I. D., & Ansari, D. (2008). Domain-specific and domain-general changes in children's development of number comparison. *Developmental Science*, *11*(5), 644-649.

Horner, V. (2007). Teaching number skills and concepts with Stern Structural Arithmetic materials. *Down Syndrome Research and Practice*, *12*(1), 27-31.

Hubbard, E. M., Diester, I., Cantlon, J. F., Ansari, D., Van Opstal, F., & Troiani, V. (2008). The evolution of numerical cognition: From number neurons to linguistic quantifiers. *The Journal of Neuroscience*, *28*(46), 11819-11824.

Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P., & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience*, *6*(6), 435-448.

Hughes, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics*. Oxford: Basil Blackwell.

Hunting, R. P., & Mousley, J. (2009, January). How early childhood practitioners view young children's mathematical thinking. In *PME 2009: Proceedings of 33rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. The International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Huntley-Fenner, G. (2001). Children's understanding of number is similar to adults' and rats': numerical estimation by 5–7-year-olds. *Cognition*, *78*(3), B27-B40.

Huttenlocher, J., Jordan, N. C., & Levine, S. C. (1994). A mental model for early arithmetic. *Journal of Experimental Psychology: General*, *123*(3), 284.

Hyde, D. C., Khanum, S., & Spelke, E. S. (2014). Brief non-symbolic, approximate number practice enhances subsequent exact symbolic arithmetic in children. *Cognition*, *131*(1), 92-107.

Inglis, M., Attridge, N., Batchelor, S., & Gilmore, C. (2011). Non-verbal number acuity correlates with symbolic mathematics achievement: But only in children. *Psychonomic bulletin & review*, *18*(6), 1222-1229.

Ito, Y., & Hatta, T. (2003). Semantic processing of Arabic, Kanji, and Kana numbers: Evidence from interference in physical and numerical size judgments. *Memory & cognition*, *31*(3), 360-368.

INSEE (2012). *Enquête Information et Vie Quotidienne 2011*. Editions INSEE

Izard, V., Dehaene-Lambertz, G., & Dehaene, S. (2008). Distinct cerebral pathways for object identity and number in human infants. *PLoS biology*, *6*(2), e11.

Izard, V., Sann, C., Spelke, E. S., & Streri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *106*(25), 10382-10385.

Jarlegan, A., Fayol, M., & Barrouillet, P. (1996). De soixante douze à 72, et inversement: Une étude du transcodage chez les enfants de 7 ans. *Revue de Psychologie de l'Education*, *1*, 109-131.

Nye, J. (2006). Teaching Number Skills to Children with Down Syndrome Using the Numicon Foundation Kit. Down Syndrome Educational Trust

Jonas, N. (Décembre 2012). Pour les générations les plus récentes, les difficultés des adultes diminuent à l'écrit mais augmentent en calcul, *Insee Première, 1426*

Jordan, N. C., Glutting, J., & Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and individual differences*, *20*(2), 82-88.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M. N. (2009). Early math matters: kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental psychology*, *45*(3), 850.

Kail, M., & Fayol, M. (2003). Les sciences cognitives à l'école. Paris : PUF

Karmiloff-Smith, A. (2009). Nativism versus neuroconstructivism: rethinking the study of developmental disorders. *Developmental psychology*, *45*(1), 56.

Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W., & Volkmann, J. (1949). The discrimination of visual number. *The American journal of psychology*, 498-525.

Kinsbourne, M., & Warrington, E. K. (1962). A variety of reading disability associated with right hemisphere lesions. *Journal of Neurology, Neurosurgery, and Psychiatry*, *25*(4), 339.

Kinsbourne, M., & Warrington, E. K. (1963). Developmental factors in reading and writing backwardness. *British Journal of Psychology*, *54*(2), 145-156.

Kittler, P. M., Krinsky-McHale, S. J., & Devenny, D. A. (2008). Dual-task processing as a measure of executive function: a comparison between adults with Williams and Down syndromes. *American Journal on Mental Retardation*, *113*(2), 117-132.

Klahr, D., & Wallace, J. G. (1976). *Cognitive development: An information-processing view*. Hillsdale, NJ: Erlbaum

Klein, B. P., & Mervis, C. B. (1999). Contrasting patterns of cognitive abilities of 9-and 10-year-olds with Williams syndrome or Down syndrome. *Developmental Neuropsychology*, *16*(2), 177-196.

Kolkman, M. E., Kroesbergen, E. H., & Leseman, P. P. (2013). Early numerical development and the role of non-symbolic and symbolic skills. *Learning and Instruction*, *25*, 95-103.

Krajewski, K., & Schneider, W. (2009). Exploring the impact of phonological awareness, visual–spatial working memory, and preschool quantity–number competencies on mathematics achievement in elementary school: Findings from a 3-year longitudinal study. *Journal of experimental child psychology*, *103*(4), 516-531.

Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., ... & von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *Neuroimage, 57*(3), 782-795.

Landerl, K., Bevan, A., & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8–9-year-old students. *Cognition*, *93*(2), 99-125.

Laski, E. V., & Siegler, R. S. (2007). Is 27 a big number? Correlational and causal connections among numerical categorization, number line estimation, and numerical magnitude comparison. *Child Development*, *78*(6), 1723-1743.

Le Corre, M., & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, *105*(2), 395-438.

LeFevre, J. A., Fast, L., Skwarchuk, S. L., Smith-Chant, B. L., Bisanz, J., Kamawar, D., & Penner-Wilger, M. (2010). Pathways to mathematics: Longitudinal predictors of performance. *Child development*, *81*(6), 1753-1767.

Lewis, V. (1987). *Development and Handicap*. Oxford: Blackwell.

Lewis, C., Hitch, G. J., & Walker, P. (1994). The prevalence of specific arithmetic difficulties and specific reading difficulties in 9-to 10-year-old boys and girls. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *35*(2), 283-292.

Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013). Is approximate number precision a stable predictor of math ability?. *Learning and individual differences*, *25*, 126-133.

Lipton, J. S., & Spelke, E. S. (2003). Origins of number sense large-number discrimination in human infants. *Psychological Science*, *14*(5), 396-401.

Lipton, J. S., & Spelke, E. S. (2005). Preschool children's mapping of number words to nonsymbolic numerosities. *Child Development*, *76*(5), 978-988.

Lochy, A. (2003, June). Influence of language in early acquisition of numbers: a comparison of French and German. In *Presentation on the 3rd Aachen-Ghent Brain & Number Workshop, Aachen* (Vol. 10, No. 11.6, p. 2003).

Lochy, A., & Censabella, S. (2005). Le système symbolique arabe: acquisition, évaluation, et pistes rééducatives. *La dyscalculie, trouble du développement numérique de l'enfant', Solal*, 77-104.

Lourenco, S. F., & Longo, M. R. (2011). Origins and development of generalized magnitude representation. *Space, time and number in the brain: Searching for the foundations of mathematical thought*, 225-244.

Lourenco, S. F., & Longo, M. R. (2010). General magnitude representation in human infants. *Psychological Science*, 21(6), 873- 881

Lourenco, S. F., Bonny, J. W., Fernandez, E. P., & Rao, S. (2012). Nonsymbolic number and cumulative area representations contribute shared and unique variance to symbolic math competence. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *109*(46), 18737-18742.

Mammarella, I. C., Borella, E., Pastore, M., & Pazzaglia, F. (2013). The structure of visuospatial memory in adulthood. *Learning and Individual Differences*, *25*, 99-110.

Mandler, G., & Shebo, B. J. (1982). Subitizing: an analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General*, *111*(1), 1.

Marinthe, C., Fayol, M., & Barrouillet, P. (2001). Troubles du Calcul et Dyscalculies chez l'Enfant. Paris : Masson

Mazzocco, M. M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). Impaired acuity of the approximate number system underlies mathematical learning disability (dyscalculia). *Child development*, *82*(4), 1224-1237.

McCloskey, M. (1992). Cognitive mechanisms in numerical processing: Evidence from acquired dyscalculia. *Cognition*, *44*(1), 107-157.

McCloskey, M., Caramazza, A., & Basili, A. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia. *Brain and cognition*, *4*(2), 171-196.

Mechner, F. (1958). Probability relations within response sequences under ratio reinforcement. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *1*(2), 109-121.

Meck, W. H., & Church, R. M. (1983). A mode control model of counting and timing processes. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, *9*(3), 320.

Meyer S., Vilette, B. & Sockeel, P. (2014). Children's mapping between symbolic and non-symbolic representations of number in typical and atypical development. *Colloque International : Développements atypiques : quels apports pour la psychologie du développement ?,* 17-18 avril 2014, Rennes, France.

Miller, K. F. & Paredes, D. (1996). On the Shoulders of Giants: Cultural Tools and Mathematical. The nature of mathematical thinking, 83.

Mix, K. S. (1999). Preschoolers' recognition of numerical equivalence: Sequential sets. *Journal of experimental child psychology*, *74*(4), 309-332.

Mix, K. S., Huttenlocher, J., & Levine, S. C. (2002). *Quantitative development in infancy and early childhood*. Oxford University Press.

Moeller, K., Pixner, S., Kaufmann, L., & Nuerk, H. C. (2009). Children's early mental number line: Logarithmic or decomposed linear?. *Journal of experimental child psychology*, *103*(4), 503-515.

Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1973). Determinants of reaction time for digit inequality judgments. *Bulletin of the Psychonomic Society*, *1*(3), 167-168.

Muldoon, K., Towse, J., Simms, V., Perra, O., & Menzies, V. (2013). A longitudinal analysis of estimation, counting skills, and mathematical ability across the first school year. *Developmental psychology*, *49*(2), 250.

Mundy, E., & Gilmore, C. K. (2009). Children's mapping between symbolic and nonsymbolic representations of number. *Journal of experimental child psychology*, *103*(4), 490-502.

Noël, M. P. (2005). Le point sur la question des compétences numériques précoces. In M. P. Noël, *La dyscalculie: Trouble du développement numérique de l'enfant*, (p. 15). Marseille : Solal

Noël, M. P. (2005). Le transcodage chez l'enfant. In Van Hout, A., Meljac, C., & Ficher, JP. (Eds). *Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant*, (pp. 111-122). Issy-les-Moulineaux : Elsevier Masson

Noël, M. P. (2005b). La représentation sémantique du nombre: son développement et ses troubles. In M. P. Noël (Ed.). *La dyscalculie, trouble du développement numérique de l'enfant*, (pp.105-137). Marseille : Solal.

Noël, M. P. (2005). *La dyscalculie: trouble du développement numérique de l'enfant*. Bruxelles : de Boeck.

Noël, M. P., & Turconi, E. (1999). Assessing number transcoding in children. *European review of applied psychology*, *49*(4), 295-304.

Nuerk, H. C., Kaufmann, L., Zoppoth, S., & Willmes, K. (2004). On the development of the mental number line: More, less, or never holistic with increasing age?. *Developmental Psychology*, *40*(6), 1199.

Nye, J., Buckley, S., & Bird, G. (2005). Evaluating the Numicon system as a tool for teaching number skills to children with Down syndrome. *Down Syndr ome News Update, 5*(1), 2–13.

Nye, J., Clibbens, J., & Bird, G. (1995). Numerical ability, general ability and language in children with Down syndrome. *Down syndrome research and practice, 3*(3), 92-102.

Nye, J., Fluck, M., & Buckley, S. (2001). Counting and cardinal understanding in children with Down syndrome and typically developing children. *Down Syndrome Research and Practice, 7*(2), 68-78.

Nys, J., Ventura, P., Fernandes, T., Querido, L., & Leybaert, J. (2013). Does math education modify the approximate number system? A comparison of schooled and unschooled adults. *Trends in Neuroscience and Education*, *2*(1), 13-22.

Obersteiner, A., Reiss, K., & Ufer, S. (2013). How training on exact or approximate mental representations of number can enhance first-grade students' basic number processing and arithmetic skills. *Learning and Instruction*, *23*, 125-135.

OCDE (2013). Enquête PISA 2012. http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results.htm

Park, J., & Brannon, E. M. (2013). Training the approximate number system improves math proficiency. *Psychological science, 24(10*), 2013-2019.

Paterson, S. (2001). Language and number in Down syndrome: The complex developmental trajectory from infancy to adulthood. *Down Syndrome Research and Practice*, *7*(2), 79-86.

Paterson, S. J., Girelli, L., Butterworth, B., & Karmiloff-Smith, A. (2006). Are numerical impairments syndrome specific? Evidence from Williams syndrome and Down's syndrome. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *47*(2), 190-204.

Pavese, A., & Umiltà, C. (1998). Symbolic distance between numerosity and identity modulates Stroop interference. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *24*(5), 1535.

Piaget, J. (1952). *Essai sur les transformations des opérations logiques*. Paris : PUF.

Piazza, M. (2010). Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations. *Trends in cognitive sciences*, *14*(12), 542-551.

Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., ... & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, *116*(1), 33-41.

Pica, P., Lemer, C., Izard, V., & Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group. *Science*, *306*(5695), 499-503.

Pinel, P., Dehaene, S., Riviere, D., & LeBihan, D. (2001). Modulation of parietal activation by semantic distance in a number comparison task. *Neuroimage*, *14*(5), 1013-1026.

Poltrock, S. E., & Schwartz, D. R. (1984). Comparative judgments of multidigit numbers. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *10*(1), 32.

Porter, J. (1999). Learning to count: a difficult task?. *Down syndrome research and practice*, *6*(2), 85-94.

Potter, M. C., & Levy, E. I. (1968). Spatial enumeration without counting. *Child development*, 265-272.

Power, R. J. D., & Dal Martello, M. F. (1990). The dictation of Italian numerals. *Language and Cognitive processes*, *5*(3), 237-254.

Ramani, G. B., & Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child development*, *79*(2), 375-394.

Restle, F. (1970). Speed of adding and comparing numbers. *Journal of Experimental Psychology*, *83*(2), 274.

Revkin, S. K., Piazza, M., Izard, V., Cohen, L., & Dehaene, S. (2008). Does subitizing reflect numerical estimation?. *Psychological Science*, *19*(6), 607-614.

Reynvoet, B., & Brysbaert, M. (1999). Single-digit and two-digit Arabic numerals address the same semantic number line. *Cognition*, *72*(2), 191-201.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of educational psychology*, *93*(2), 346.

Rivera-Batiz, F. L. (1982). International migration, non-traded goods and economic welfare in the source country. *Journal of Development Economics*, *11*(1), 81-90.

Rondal, J. A. (Ed.). (2001). Manuel de psychologie des handicaps: sémiologie et principes de remédiation. Editions Mardaga.

Rousselle, L., & Noël, M. P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. *Cognition*, *102*(3), 361-395.

Rousselle, L., Palmers, E., & Noël, M. P. (2004). Magnitude comparison in preschoolers: What counts? Influence of perceptual variables. *Journal of Experimental Child Psychology*, *87*(1), 57-84.

Rubinsten, O., Henik, A., Berger, A., & Shahar-Shalev, S. (2002). The development of internal representations of magnitude and their association with Arabic numerals. *Journal of Experimental Child Psychology*, *81*(1), 74-92.

Sameroff, A. J., & Haith, M. M. (1996). *The five to seven year shift*. London : The University of Chicago Press.

Sarnecka, B. W., & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition*, *108*(3), 662-674.

Saxe, G. B., & Kaplan, R. (1981). Gesture in early counting: A developmental analysis. *Perceptual and Motor skills*, *53*(3), 851-854.

Schaeffer, B., Eggleston, V. H., & Scott, J. L. (1974). Number development in young children. *Cognitive Psychology*, *6*(3), 357-379.

Secada, W. G., Fuson, K. C., & Hall, J. W. (1983). The transition from counting-all to counting-on in addition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47-57.

Sekuler, R., & Mierkiewicz, D. (1977). Children's judgments of numerical inequality. *Child Development*, 630-633.

Sella, F., Lanfranchi, S., & Zorzi, M. (2013). Enumeration skills in Down syndrome. *Research in developmental disabilities*, *34*(11), 3798-3806.

Seron, X. , Deloche, G., & Noël, M. P. (1991). Un transcodage des nombres chez l'enfant: la production des chiffres sous dictée. In C. Meljac, J. Bideaud, et J. P. Fischer (Eds). *Les chemins du nombre,* (pp. 303-328). Lille : Presses Universitaires du Septentrion.

Seron, X., & Fayol, M. (1994). Number transcoding in children: A functional analysis. *British Journal of Developmental Psychology, 12*(3), 281-300.

Seron, X., Noël, M. P., & Van der Elst, G. (1997). Where do Arabic number reading errors come from. In Presentation on the *VIIIth European Conference on Developmental Psychology, Rennes*.

Shepperdson, B. (1994). Attainments in reading and number of teenagers and adults with Down syndrome. *Down Syndrome Research and Practice*, *2*(3), 97-101.

Shipley, E. F., & Shepperson, B. (1990). Countable entities: Developmental changes. *Cognition*, *34*(2), 109-136.

Siegel, L. S. (1974). Development of number concepts: Ordering and correspondence operations and the role of length cues. *Developmental Psychology*, *10*(6), 907.

Siegler, R. S. (1996). Unidimensional thinking, multidimensional thinking, and characteristic tendencies of thought. In J. Sameroff & M. M. Haith, *The five to seven year shift: The age of reason and responsibility*, (pp. 63-84). London : University of Chicago Press

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, *75*(2), 428-444.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation. *Handbook of mathematical cognition*, 197-212.

Siegler, R. S., & Jenkins, E. (1989). How children discover new strategies. Hillsdale, NJ : Erlbaum

Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, *14*(3), 237-250.

Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2008). Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Developmental Science, 11*(5), 655-661.

Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2009). Playing linear number board games—but not circular ones—improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of Educational Psychology*, *101*(3), 545.

Siegler, R. S., & Shipley, C. (1987). The role of learning in children's strategy choices. *Development and learning: Conflict or congruence*, 71-108.

Siegler, R. S., & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do. *Origins of cognitive skills*, 229-293.

Simmons, F. R., Willis, C., & Adams, A. M. (2012). Different components of working memory have different relationships with different mathematical skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, *111*(2), 139-155.

Simon, T. J. (1997). Reconceptualizing the origins of number knowledge: A “non-numerical” account. *Cognitive Development*, *12*(3), 349-372.

Sloper, P., Cunningham, C., Turner, S., & Knussen, C. (1990). Factors related to the academic attainments of children with Down's syndrome. *British Journal of Educational Psychology*, *60*(3), 284-298.

Spelke, E. (2008). Effects of music instruction on developing cognitive systems at the foundations of mathematics and science. *Learning, Arts, and the Brain*, *17*.

Spelke, E. S. (2000). Core knowledge. *American psychologist*, *55*(11), 1233.

Spelke, E. S., & Tsivkin, S. (2001). Language and number: A bilingual training study. *Cognition*, *78*(1), 45-88.

Starkey, P., & Cooper, R. G. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science, 210*(4473), 1033-1035.

Starkey, P., Spelke, E. S., & Gelman, R. (1983). Detection of intermodal numerical correspondences by human infants. *Science*, *222*(4620), 179-181.

Starkey, P., Spelke, E. S., & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition*, *36*(2), 97-127.

Strauss, M. S., & Curtis, L. E. (1981). Infant perception of numerosity. *Child Development*, 1146-1152.

Strauss, M. S., & Curtis, L. E. (1984). Development of numerical concepts in infancy. *Origins of cognitive skills*, 131-155.

Streefland, L. (1997). Charming fractions or fractions being charmed. *Learning and Teaching Mathematics–An International Perspective*, 347-372.

Thevenot, C., & Castel, C. (2012). Relationship and transfer between mental and written arithmetic. *Journal of Cognitive Psychology*, *24*(3), 286-294.

Thevenot, C., & Masson, S. (2013). Améliorer les compétences numériques. *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, (123), 182-188.

Thorndike, E. (1921). Measurement in education. *The Teachers College Record*, *22*(5), 371-379.

Todd, R.R., Barber, P.J., Jones, D., 1987. The internal representation of number: analog or digital? In J.A. Sloboda, D. Rogers (Eds.). *Cognitive Processes in Mathematics (*pp. 142–156.). Oxford: Clarendon Press.

Trick, L. M., & Pylyshyn, Z. W. (1993). What enumeration studies can show us about spatial attention: evidence for limited capacity preattentive processing. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *19*(2), 331.

Trick, L. M., & Pylyshyn, Z. W. (1994). Why are small and large numbers enumerated differently? A limited-capacity preattentive stage in vision. *Psychological review*, *101*(1), 80.

Uttley, W. (2004). An update on Sam and the progress he has made in numeracy using Numicon. *Down Syndrome News and Update*, *4*(1), 15-16.

Van Hout, A., Meljac, C. & Fischer, J.-P. (2005). *Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant*. Paris : Elsevier Masson.

van Loosbroek, E., Dirkx, G. S., Hulstijn, W., & Janssen, F. (2009). When the mental number line involves a delay: The writing of numbers by children of different arithmetical abilities. *Journal of experimental child psychology*, *102*(1), 26-39.

Vilette, B. (2002). Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction?: Evidence against early arithmetic. *Cognitive Development*, *17*(3), 1365-1383.

Vilette, B. (2009). L'“Estimateur”: un programme de remédiation des troubles du calcul. *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, (102), 165-170.

Vilette, B. (2009). L'“Estimateur”: un programme de remédiation des troubles du calcul. *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, (102), 165-170.

Vilette, B. & Schneider, N. (2011). La remédiation basée sur la représentation de la magnitude. In M. Habib, M.-P. Noël, F. Georges-Poracchia & V. Brun (Eds.), Calcul et dyscalculies. Des modèles à la remédiation (pp.130-142). Paris : Elsevier Masson.

Vilette, B. Delrieu, E. & Lehalle, H. (2008). La construction de la propriété numérique entre 2 et 4 ans. Archives de Psychologie, 73, 187-208.

Vilette, B., & Mazouz, K. (1998). Les transformations numériques et spatiales entre deux et quatre ans. *Archives de psychologie*, *66*(256), 35-47.

Vilette, B., Mawart, C., & Rusinek, S. (2010). L’outil «”Estimateur”», la ligne numérique mentale et les habiletés arithmétiques. *Pratiques psychologiques*, *16*(2), 203-214.

Von Aster, M. G., & Shalev, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology*, *49*(11), 868-873.

Wagner, S. H., & Walters, J. (1982). A longitudinal analysis of early number concepts: From numbers to number. *Action and thought: From sensorimotor schemes to symbolic operations*, 137-161.

Wang, P. P., & Bellugi, U. (1993). Williams syndrome, Down syndrome, and cognitive neuroscience. *American Journal of Diseases of Children*, *147*(11), 1246-1251.

Wilson, A. J., Dehaene, S., Dubois, O., & Fayol, M. (2009). Effects of an Adaptive Game Intervention on Accessing Number Sense in Low-Socioeconomic-Status Kindergarten Children. *Mind, Brain, and Education*, *3*(4), 224-234.

Wilson, A. J., Dehaene, S., Pinel, P., Revkin, S. K., Cohen, L., & Cohen, D. (2006). Principles underlying the design of. *Behavioral and Brain Functions*, *2*(1), 19.

Wing, T., & Tacon, R. (2007). Teaching number skills and concepts with Numicon materials. *Down Syndrome Research and Practice*, *12*(1), 22-26.

Wood, J. N., & Spelke, E. S. (2005). Infants’ enumeration of actions: Numerical discrimination and its signature limits. *Developmental Science*, *8*(2), 173-181.

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition*, *36*(2), 155-193.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, *358*(6389), 749-750.

Wynn, K. (1995). Infants possess a system of numerical knowledge. *Current Directions in Psychological Science*, 172-177.

Wynn, K. (1996). Infants' individuation and enumeration of actions. *Psychological Science*, *7*(3), 164-169.

Xu, F. (2003). Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representations. *Cognition*, *89*(1), B15-B25.

Xu, F., & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, *74*(1), B1-B11.

Xu, F., Spelke, E. S., & Goddard, S. (2005). Number sense in human infants. *Developmental Science*, *8*(1), 88-101.

Zebian, S. (2005). Linkages between number concepts, spatial thinking, and directionality of writing: The SNARC effect and the reverse SNARC effect in English and Arabic monoliterates, biliterates, and illiterate Arabic speakers. *Journal of Cognition and Culture*, *5*(1-2), 1-2.

Résumé

La compréhension du développement des habiletés numériques est un enjeu majeur pour guider les pratiques éducatives et rééducatives des jeunes enfants. Les résultats des enquêtes nationales et internationales sont unanimes à cet égard : le niveau moyen des élèves en mathématiques a chuté depuis 2003 (PISA, 2012). L'hypothèse la plus avancée à l'heure actuelle est celle d'un déficit des correspondances entre les codes numériques et le « sens des nombres » (Dehaene, 1997). Le « sens du nombre » est contenu dans la représentation analogique et non verbale des nombres. Dans le présent travail, nous cherchons à démontrer que l'estimation numérique permet ainsi d'exercer les correspondances entre les codes afin de donner du sens aux représentations symboliques écrites et orales. Malgré l'importance accordée aujourd'hui au processus d'estimation, son rôle dans les apprentissages doit encore être précisé afin d'orienter et de mieux guider les pratiques (ré)éducatives (Dehaene et Cohen, 2001 ; Von Aster et Shalev 2007). A travers trois études expérimentales, nous explorons ainsi le rôle de l'estimation numérique dans les apprentissages d'un point de vue éducatif (auprès d'enfants scolarisés en CP) et d'un point de vue rééducatif (dans le syndrome génétique de la trisomie 21). L'acquisition des différentes représentations et des relations complexes qui s'établissent entre-elles est également analysée et discutée pour mieux préciser les modèles de traitements du nombres et du calcul actuels. Les résultats obtenus corroborent ainsi une hypothèse de spiralité des apprentissages symboliques.

Mots-clés : estimation numérique, développement numérique, représentations numériques, rééducation, troubles numériques

Abstract

Understanding the development of numerical abilities is a major issue to guide educative and reeducative practices in mathematics in young children. National and international investigations has demonstrated that the mathematical skills of students has decrease since 2003 (PISA, 2012). Nowadays, weak capacities to map numerical representations and therefore a defective « number sense » (Dehaene, 1997 ; 2001) is the most supported hypothesis. The « number sense » is contained into the analogical and non-verbal representation of number. In this work, we consider that numerical estimation is a good way to exercise this mapping and give sense to verbal and written numerical symbols. Indeed, the role of numerical estimation needs to be specified in order to lead the (re)educative practices (Dehaene, 1997 ; 2001 ; Von Aster et Shalev). During three experimental studies, we explore the role of numerical estimation, in an educative and reeducative way in children in first year and children with down's syndrom. The acquisition of numerical representations and the complex relations they have are also explored and discussed through a spirality hypothesis in order to better specify actual models of number treatment.

Key-words : numerical estimation, numerical development, numerical representations, reeducation, mathematical disabilities